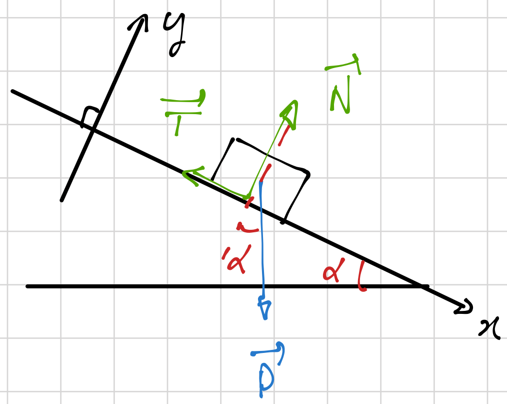
TP _ Mesure d'un coefficient de frottements

Première détermination



BAME :

+ $\vec{P} = -mg\cos\alpha\,\vec{u_y} + mg\sin\alpha\,\vec{u_x}$
+ $\vec{R} = N\,\vec{u_y} - T\,\vec{u_x}$

À la limite du glissement $\begin{cases} \vec{R} + \vec{P} = \vec{0} & \text{(solide immobile)} \\ T = f.N & \text{(limite du glissement)} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$

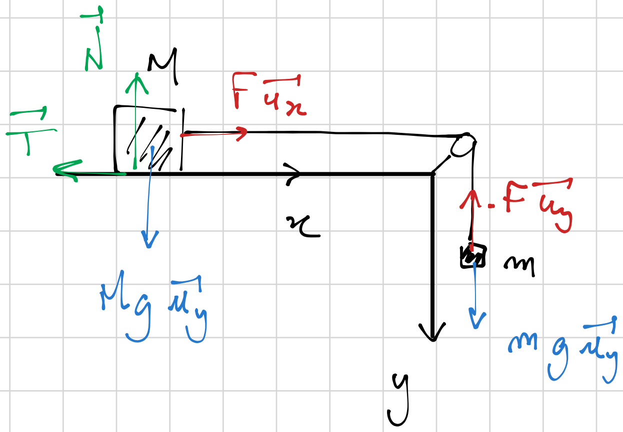
On a donc $\boxed{f = \tan(\alpha_e)}$

Pour $\alpha > \alpha_e$ $\quad \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u_x}$ non nulle

$\begin{cases} m\,\vec{a} = \vec{R} + \vec{P} \\ T = fN \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} N = mg\cos\alpha \\ T = f\,mg\cos\alpha \\ \ddot{x} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha \end{cases}}$

Rq : $\alpha \simeq 10°$ à $30°$

Seconde détermination



1ère phase : fil tendu

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -T + F \\ 0 = -Mg + N \\ T = fN \\ m\ddot{y} = mg - F \end{cases}$$

2e phase seule M est en mouvement

fil tendu :

→ même force F

→ $\ddot{x} = \ddot{y}$

On a alors

$$F = mg - m\ddot{x}$$

$$T = fMg$$

et

$$M\ddot{x} = -fMg + mg - m\ddot{x}$$

Soit

$$(M+m)\ddot{x} = g(m - fM)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{g(m-fM)}{M+m}\, t \\ x(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{g(m-fM)}{M+m}\, t^2 \end{cases}$$

avec $\begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

$x(t_0) = h \Rightarrow$

$$h = \frac{1}{2}\frac{g(m-fM)}{M+m}\, t_0^2$$

$\dot{x}(t_0) = v_0 \Rightarrow$

$$v_0^2 = \frac{g^2(m-fM)^2}{(M+m)^2}\, t_0^2$$

On a ainsi

$$v_0^2 = \frac{g^2(m-fM)^2}{(M+m)^2} \cdot \frac{2h(M+m)}{g(m-fM)}$$

Soit

$$\boxed{v_0^2 = \frac{2g(m-fM)h}{M+m}}$$

Dans la 2e phase $F = 0$ (le fil n'est plus tendu) et on a :

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -T \\ N = Mg \\ T = fN \end{cases} \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dt} = -fg$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = v_0 - fgt$$

en prenant $v(0) = v_0$

4) On intègre :

$$x(t) = v_0 t - fg\frac{t^2}{2} + h$$

$$v(t_1) = 0 \iff t_1 = \frac{v_0}{fg}$$

On a donc :

$$d = v_0 \cdot \frac{v_0}{fg} - fg\frac{v_0^2}{2f^2g^2} + h$$

Soit $\boxed{d - h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{fg}}$

$$\Rightarrow \quad d - h = \frac{1}{2fg}\frac{2g(m - fM)}{M + m}h$$

$$2fg\left(\frac{d}{h} - 1\right) = \frac{2gm}{M+m} - \frac{2fgM}{M+m}$$

$$\iff \quad 2fg\left(\underbrace{\frac{d}{h} - 1 + \frac{M}{M+m}}_{\frac{-m}{M+m}}\right) = \frac{2gm}{M+m}$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac{d}{h}\left(\frac{M+m}{m}\right) - 1\right) = 1$$

On obtient bien le résultat :

$$\boxed{f = \frac{1}{\frac{d}{h}\left(1 + \frac{M}{m}\right) - 1}}$$