Intero de cours – EM – Ch 6 et 7

1)

$$\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

u_{EM} = densité volumique en énergie électromagnétique ($J.m^{-3}$)

$$= \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$\vec{\Pi}$ = vecteur de Poynting ($W.m^{-2}$) (puissance surfacique associée à l'onde)

$$= \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

$\vec{j}\cdot\vec{E}$ = puissance volumique cédée à la matière ($W.m^{-3}$)

2)

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F(x-ct) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F'(x-ct) \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{1}{c} F(x-ct)\, \vec{u_z} \quad \left(= \frac{\vec{u_x}\wedge\vec{E}}{c} \right)$$

b)

$$u_{EM} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} \quad \text{car } B = \frac{E}{c}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \text{car } \mu_0 c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$= \varepsilon_0 E^2$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\, \vec{u_x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 F^2(x-ct)\right) = -c\,\varepsilon_0 2\, F'(x-ct)\, F(x-ct)$$

$$\operatorname{div}(\vec{\Pi}) = \frac{1}{\mu_0 c}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\, 2\, F'(x-ct)\, F(x-t) = 2\,\varepsilon_0\, c\, F'\, F$$

L'équation de Poynting est bien vérifiée ($\vec{j}=\vec{0}$)

3) onde plane (même valeur dans les plans x = cte à t fixé)
progressive (forme $t - \frac{x}{c}$ avec $c = \frac{\omega}{k}$ ⇒ on retrouve la même forme un peu plus loin un peu plus tard)
monochromatique (un seul ω).

3. b) Dans le vide $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ⇒ $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ soit $E_{0z} = 0$

c) Equation de propagation dans le vide : $\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad \text{soit} \quad -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$ relation de dispersion

d) v_φ est la vitesse de propagation de l'OPPM,

$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ ⇒ $v_\varphi = c$ dans le vide.

e) $\vec{B} = \frac{\vec{u_z} \wedge \vec{E}}{c}$ ⇒ $\vec{B} = \frac{E_{0x}}{c}\cos(\omega t - kz)\,\vec{u_y}$

f) $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ ⇒ $\vec{\Pi} = \frac{E_{0x}^2}{c\mu_0}\cos^2(\omega t - kz)\,\vec{u_z}$

soit $\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_{0x}^2}{2\mu_0 c}\,\vec{u_z}}$

4) $i\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$ $\quad$ $i\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$

$i\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -(-i\omega \underline{\vec{B}})$ $\quad$ $i\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 (-i\omega \underline{\vec{E}})$