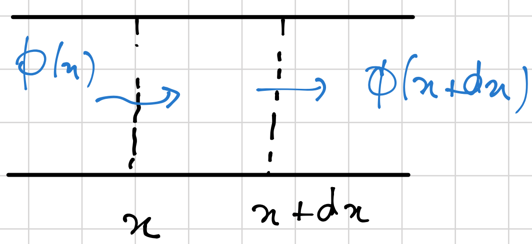
THERMODYNAMIQUE _ TD1 _ Diffusion thermique

Exercice 1

1)



On applique le 1er principe de la thermodynamique au système compris entre x et $x+dx$ entre les instants t et $t+dt$:

$$dU = \delta Q$$

D'autre part, comme la température ne dépend que de x et t, la loi de Fourier donne : $\vec{j}_{th} = -K \,\overrightarrow{\text{grad}}\, T \Rightarrow \vec{j}_{th} = -K \dfrac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$

On écrit : $\vec{j}_{th} = j_{th}(x,t)\,\vec{u}_x$ avec $j_{th}(x,t) = -K \dfrac{\partial T}{\partial x}$

$$\Rightarrow \delta Q = j_{th}(x,t)\, S\, dt - j_{th}(x+dx,t)\, S\, dt$$

$$= -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}\, S\, dx\, dt$$

$$= K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\, S\, dx\, dt$$

La variation d'énergie interne : $dU = \rho S dx\, c\left(T(t+dt,x) - T(t,x)\right)$

$$= \rho S dx\, c \frac{\partial T}{\partial t}\, dt$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{équation de la chaleur}$$

2) a) Le cylindre de section S est parcouru par i

méthode 1 : on connaît l'expression de $R = \dfrac{dx}{\sigma S}$ et on écrit

$$\mathcal{P}_{Joule} = R i^2 = \frac{i^2}{\sigma S}\, dx$$

méthode 2 : on écrit $j_{elec} = \frac{i}{S}$, on a $\underbrace{p_{Joule} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma}}_{\text{puissance volumique}}$

Puis $P_{Joule} = S\,dx\; p_{Joule}$

$= S\,dx \frac{i^2}{\sigma S^2}$ → c'est bien le même résultat.

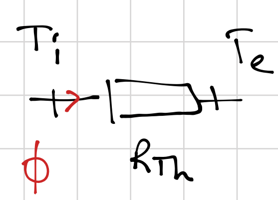
b) On écrit le 1er principe : $dU = \delta Q + \underbrace{P_{Joule}\,dt}_{\text{terme de création}}$

→ $\rho c S\,dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S\,dx\,dt + dx \frac{i^2}{\sigma S} dt$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{i^2}{\sigma S^2}}$$

EXERCICE 2

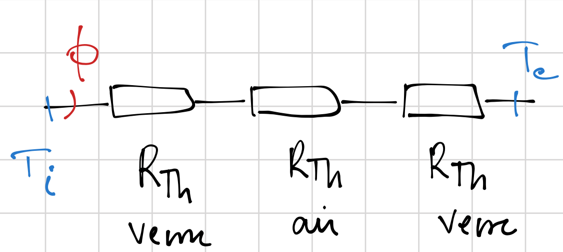
1) $R_{Th} = \frac{e}{\lambda S}$



$(T_i - T_e) = R_{Th}\,\phi \Rightarrow \phi = \frac{T_i - T_e}{R_{Th}}$

A.N : $\begin{cases} R_{Th} = 1{,}67 \cdot 10^{-3}\ K.W^{-1} \\ \phi = 6\ kW \end{cases}$

2)



Association série :

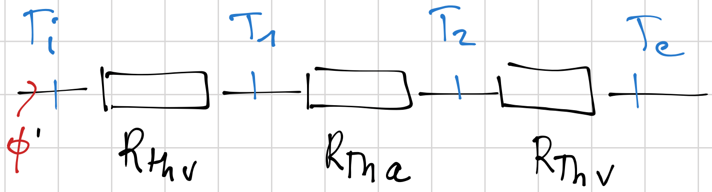
$R_{Th\,eq} = \frac{2e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S}$

$\phi' = \frac{T_i - T_e}{R_{Th\,eq}}$

A.N : $R_{Th\,eq} = 8{,}33 \cdot 10^{-2}\ K.W^{-1}$

$\phi' = 120\ W$ le flux thermique a été divisé par 50.

3)



On note θ les températures en °C et T lorsqu'elles sont en K

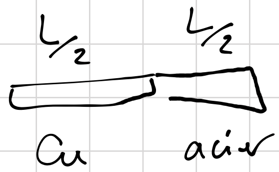
$$T_i - T_1 = R_{Th,v}\,\phi' \Rightarrow \theta_1 = 16{,}8\,°C$$

$$T_2 - T_e = R_{Th,v}\,\phi' \Rightarrow \theta_2 = 7{,}2\,°$$

θ_1 est très proche de θ_i et θ_2 est très proche de θ_e

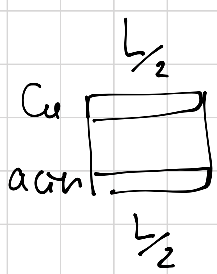
$\longrightarrow$ les vitres n'isolent quasiment pas.

4) $R_1 = \dfrac{L}{\lambda_{Cu}\,S}$ $\qquad R_2 = \dfrac{L}{\lambda_{acier}\,S}$ et $R_1 = \dfrac{R_2}{2}$



$$R_3 = \frac{L}{2\lambda_{Cu}S} + \frac{L}{2\lambda_{acier}S} = \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2} = \frac{3R_1}{2}$$

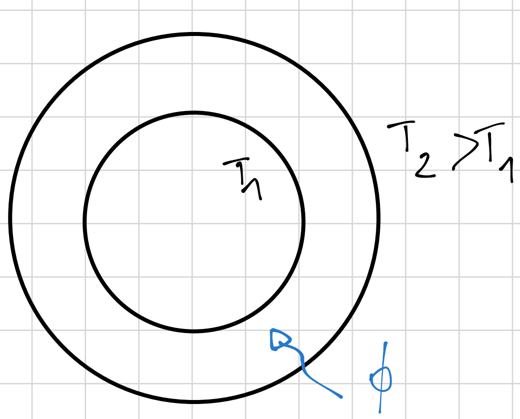
$\longrightarrow$ la glace fond en 30 minutes



$$\frac{1}{R_4} = \frac{2\lambda_{Cu}S}{L} + \frac{2\lambda_{acier}S}{L} = \frac{2}{R_1} + \underbrace{\frac{2}{R_2}}_{\frac{1}{R_1}} = \frac{3}{R_1}$$

$\Rightarrow R_4 = \dfrac{R_1}{3} \Rightarrow$ la glace fond en 6 minutes et 40s.

EXERCICE 3



1) Le système est invariant par toute rotation de centre O $\Rightarrow T(M,t) = T(r,t)$

Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T$

soit $\vec{j}_{th} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r}\,\vec{u}_r$

On notera $\boxed{j_{th}(r,t) = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial r}}$

2)a) On peut faire la soustraction $\dfrac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \dfrac{4}{3}\pi r^3$

avec $(r+dr)^3 = r^3\left(1+\dfrac{dr}{r}\right)^3 \simeq r^3\left(1+\dfrac{3dr}{r}\right)$

Autre méthode : on écrit le volume élémentaire en coord. sphériques

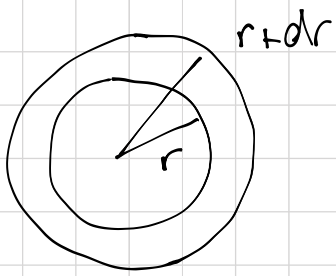
$$d^3\tau = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

et on intègre sur θ et φ $\Rightarrow$ $\boxed{d\tau = 4\pi r^2 dr}$

$$\Rightarrow \quad dU = \rho \, 4\pi r^2 dr \, c \left(T(t+dt, r) - T(t, r) \right)$$

$$= \rho \, 4\pi r^2 dr \, c \, \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

b)



$$\delta Q = \left(j_{th}(r,t) \, 4\pi r^2 - j_{th}(r+dr, t) \, 4\pi (r+dr)^2 \right) dt$$

$$= -4\pi \, dr \, \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j_{th} \right) dt$$

$$= 4\pi \, dr \, \lambda \, \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) dt$$

c) On a finalement : $\boxed{\rho c r^2 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}$

Ce résultat est équivalent à $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$ en coord. sphériques

3) a) En régime permanent, l'équation précédente s'écrit :

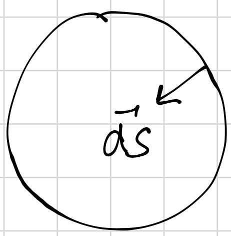
$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \iff r^2 \frac{dT}{dr} = -A \quad \text{avec } A \text{ constante}$$

soit $\frac{dT}{dr} = -\frac{A}{r^2} \Rightarrow T(r) = \frac{A}{r} + B$

$$\begin{cases} T(a) = T_1 = \frac{A}{a} + B \\ T(b) = T_2 = \frac{A}{b} + B \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{T_2 - T_1}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \dfrac{ab(T_2 - T_1)}{a - b} \\ B = T_2 - \dfrac{a(T_2 - T_1)}{a - b} \end{cases}$$

Finalement : $\boxed{T(r) = -\dfrac{ab\,(T_2 - T_1)}{(b-a)\,r} + \dfrac{bT_2 - aT_1}{b-a}}$

b) $j_{th} = -\lambda \dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{\lambda ab\,(T_2 - T_1)}{(b-a)\,r^2}$

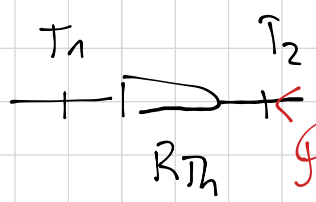


le flux entrant dans une sphère de rayon r :

$$\mathcal{P} = \iint_S \vec{j_{th}} \cdot \vec{dS}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P} = \frac{\lambda 4\pi ab\,(T_2 - T_1)}{(b-a)}$$

c)



$T_2 - T_1 = \mathcal{P}\, R_{Th} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{Th} = \dfrac{b-a}{4\pi\lambda ab}}$

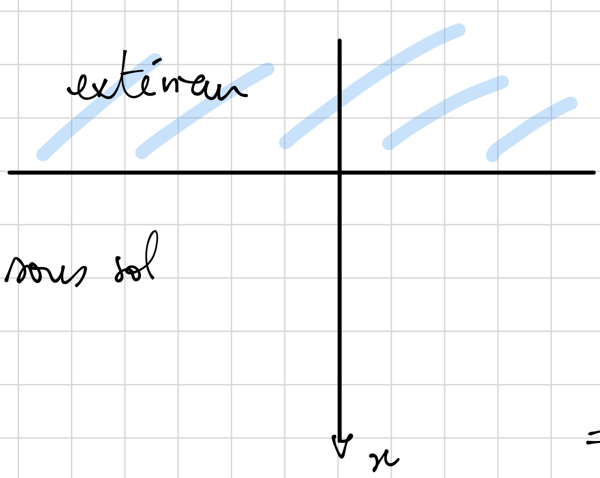
A.N : $R_{Th} = 204\ W.K^{-1}$, $\mathcal{P} = 0{,}39\ W$

Exercice 4

1) Ces variations correspondent à l'évolution de la température au cours de la journée (alternance jour/nuit) et au cours de l'année (saisons).

Intérêt : dans le cas d'un système linéaire, on peut décomposer toute variation de T comme une somme de variations sinusoïdales (la réponse étant alors la somme des réponses à chaque ω).

2)



a) Equation de la chaleur en un point $x > 0$: $\boxed{\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = K \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\rho c\, i\omega\, f(x) = K\, f''(x)}$

b) $f''(x) - \rho c \dfrac{i\omega}{K} f(x) = 0$

Equation caractéristique $r^2 = i \dfrac{\rho c \omega}{K} \Rightarrow r^2 = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{\rho c \omega}{K}}\right)^2$

car $i = e^{i\pi/2} = \left(e^{i\pi/4}\right)^2$

On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2K}{\rho c \omega}}$ homogène à une longueur

$$f(x) = A\, e^{-\left(\frac{1+i}{\delta}\right)x} + B\, \underbrace{e^{\frac{1+i}{\delta}x}}_{}$$

diverge lorsque $x \to \infty$

$\Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow \underline{\theta}(x,t) = A\, e^{-x/\delta}\, e^{i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$

En $x = 0$ $\underline{\theta}(0,t) = \theta_0\, e^{i\omega t} \Rightarrow A = \theta_0$ et on a finalement

$$\boxed{T(x,t) = T_0 + \theta_0\, e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \text{ onde évanescente}}$$

3) $T = 24\,h = 8{,}64 \cdot 10^4\,s$ $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ rad \cdot s^{-1}$

$T_0 =$ température moyenne $= 8°C$

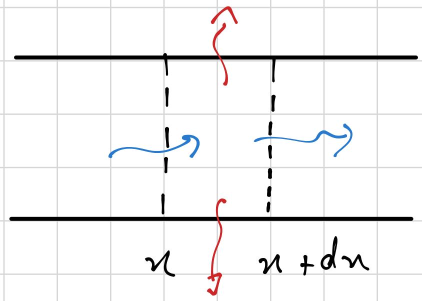
$\theta_0 =$ amplitude $= 8°C$

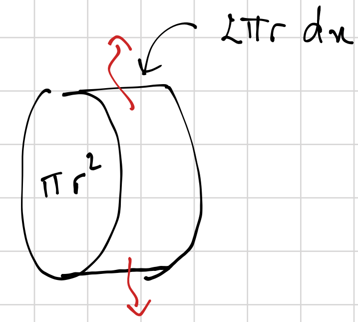
On cherche x_1 tel que $\theta_0\, e^{-\frac{x_1}{\delta}} = 1°C \Rightarrow x_1 = \delta \ln\left(\dfrac{\theta_0}{1}\right)$

A.N : $\delta = 1{,}28 \cdot 10^{-1}\ m$ et $x_1 = 0{,}27\ m$

4) $T' = 365\,T \Rightarrow$ δ est multiplié par $\sqrt{365}$ par rapport au cas précédent $\Rightarrow \delta' = 7{,}1\,m$ les variations de température plus lente sont ressenties sur une plus grande profondeur.

Exercice 5





1) 1er principe de la thermodynamique : $dU = \delta Q$

En régime permanent $T(t+dt) = T(t) \Rightarrow dU = 0$

$$j_{th}(x)\,\pi r^2 - j_{th}(x+dx)\,\pi r^2 - 2\pi r\,dx\,h\,(T(x) - T_e) = 0$$

$$-\frac{dj_{th}}{dx} - \frac{2h}{r}(T(x) - T_e) = 0$$

Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T \Rightarrow j_{th}(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda r}(T(x) - T_e) = 0}$$

2) Solution particulière : $T(x) = T_e$

Solution homogène $T(x) = A e^{x/\delta} + B e^{-x/\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{\lambda r}{2h}}$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = T_e + A e^{x/\delta} + B e^{-x/\delta}}$$

3) On a continuité de la température en $x = 0$ $T(0) = T_1$

et continuité du flux en $x = L$: $j_{th}(L) = h(T(L) - T_e)$

4) $A \to 0$ et $B \to (T_1 - T_e)$ pour $L \gg \delta$

$$\Rightarrow T(x) = T_e + (T_1 - T_e)\,e^{-x/\delta}$$

5) $$P_{ailette \to air} = \int_0^L h(T - T_e)\,2\pi r\,dx$$

$$= h(T_1 - T_e)\,2\pi r \left[-\delta\,e^{-x/\delta}\right]_0^L$$

$e^{-L/\delta} \ll 1$ pour $L \gg \delta$ $\Rightarrow$ $P_{\text{ailette} \to \text{air}} = h\, 2\pi r\, \delta\, (T_1 - T_e)$

Rq : en régime permanent on doit avoir $P_{\text{ailette} \to \text{air}} = \pi r^2 j_{th}(0)$ (flux entrant en $x=0$). On vérifie :

$$j_{th}(0)\, \pi r^2 = \frac{\lambda}{\delta} \pi r^2 (T_1 - T_e)$$

$$= \frac{\lambda \pi r^2}{\delta^2} \delta (T_1 - T_e) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{2h}{\lambda r}$$

$$= 2\pi r h \delta (T_1 - T_e)$$

6) En absence d'ailette la paroi évacuerait : $h (T_1 - T_e) \pi r^2$

$$\Rightarrow \eta = \frac{P_{\text{avec ailette}}}{P_{\text{sans ailette}}} = \frac{2\pi r h \delta (T_1 - T_e)}{h (T_1 - T_e) \pi r^2} = \frac{2\delta}{r}$$

A.N : $\delta = 3{,}54 \cdot 10^{-2}$ m , $\eta = 71$

Le refroidissement est 71 fois plus efficace avec l'ailette.