$\boxed{\text{Interro de cours - EM - Ch 9}}$

1) Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ valable pour des fréquences inférieures à 10^{14} Hz.

2) Dans le conducteur $\rho = 0$ (équation de la charge + loi d'Ohm locale + équation de Maxwell Gauss $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho = 0$

$\rho \to 0$ au bout d'un temps $\frac{\varepsilon_0}{\gamma}$ très court devant la période des phénomènes étudiés).

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On compare les ordres de grandeur de $\vec{j_D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$\frac{\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \|}{\| \gamma \vec{E} \|} \simeq \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} \simeq \frac{10^{-11}}{10^{7}} \omega \ll 1 \quad \text{pour } \omega < 10^{14} \times 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$\Rightarrow \vec{j_D}$ est négligeable devant $\vec{j}$.

3) $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E}) = \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E}$ $\quad \operatorname{div} \vec{E} = 0$

$$\vec{\operatorname{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\vec{\Delta} \vec{E}$$

soit $\boxed{\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ (équation de diffusion)

4) On a $-\underline{k}^2 = \mu_0 \gamma i \omega$

$e^{-i\pi/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

soit $\underline{k}^2 = \left(e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \right)^2 \Rightarrow \underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta}$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

k' et k'' sont positifs $\Rightarrow$ $\boxed{\underline{k} = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}}$

$k' = k'' = \frac{1}{\delta}$

5) $\underline{\vec{E}} = E_0 \, e^{-k'' z} \, e^{i(\omega t - k' z)} \, \vec{u}_x$

$\hookrightarrow \vec{E} = E_0 \, e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$

On peut écrire $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$

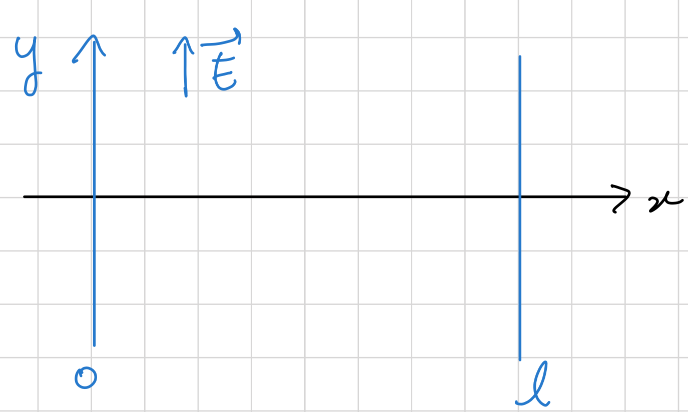
$\Rightarrow \underline{\vec{B}} = \frac{1-i}{\delta \omega} E_0 \, e^{-z/\delta} \, e^{i(\omega t - z/\delta)} \, \vec{u}_y$

Puis $\vec{B} = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{-z/\delta} \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right) \vec{u}_y$

6) $p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E_0^2 \, e^{-2z/\delta} \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$

$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{E_0^2}{\delta \, \omega \, \mu_0} \left\langle \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right\rangle \vec{u}_z$

$= \frac{E_0^2}{2 \delta \omega \mu_0} \vec{u}_z$



1) Dans la cavité, $\vec{E}$ est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$\Rightarrow f''(x) \, g(t) - \frac{1}{c^2} f(x) \, g''(t) = 0$

soit $\underbrace{c^2 \frac{f''(x)}{f(x)}}_{\text{fonction de } x} = \underbrace{\frac{g''(t)}{g(t)}}_{\text{fonction de } t}$

2) L' égalité doit être vérifiée pour tout $x \in]0, \ell[$ et à chaque instant t. De plus, $f(x)$ s'annule en $x=0$ et $x=\ell$

$\Rightarrow$ les deux termes sont égaux à une même constante négative que l'on note $-\omega^2$

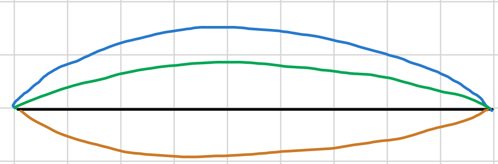
3) $\begin{cases} g''(t) + \omega^2 g(t) = 0 \\ f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ f(x) = A_1 \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + B_1 \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) \end{cases}$

On écrit les conditions aux limites : $f(0) = f(\ell) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}\ell\right) + B_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}\ell\right) = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} A_1 = 0 \\ \frac{\omega}{c}\ell = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

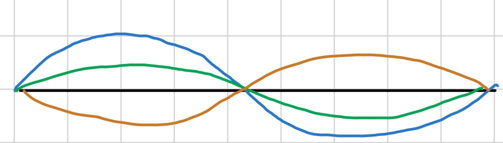
Finalement : $\left.\begin{array}{l} f(x) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \\ g(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \end{array}\right\}$ avec $\omega = \frac{n\pi c}{\ell}$

4) $n = 1$



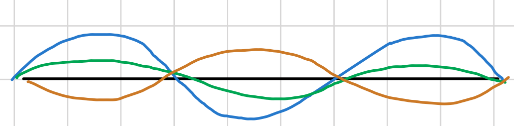
$\lambda_1 = 2\ell$

$n = 2$



$\lambda_2 = \ell$

$n = 3$



$\lambda_3 = \frac{2}{3}\ell$

$\left\{\begin{array}{l} \lambda_n = \frac{2\ell}{n} \\ k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi}{\ell} n \\ \omega_n = c\, k_n = \frac{n\pi c}{\ell} \end{array}\right.$

Analogue aux modes de vibrations d'une corde de guitare fixée en $x=0$ et $x=\ell$