

Mécanique - TD2 - Référentiels non galiléens

Exercice 1 - Véhicules en mouvement

1. Une caisse de masse m est posée à l'arrière d'une camionnette. Le coefficient de frottement entre la caisse et la camionnette est noté f . La camionnette démarre, à partir de quelle valeur de l'accélération $\vec{a}$ de la camionnette la caisse se met-elle en mouvement ?
2. On considère cette fois une citerne contenant un volume V_o d'eau correspondant à une hauteur h_o lorsque la camionnette est à l'arrêt. Que se passe-t-il lorsque la camionnette accélère avec une accélération $\vec{a} = a\vec{u}_x$? Donner l'équation de la surface du liquide $h(x)$.
On rappelle que la relation fondamentale de la statique des fluides qui traduit l'équilibre d'une particule fluide sous l'action du poids et des forces de pression s'écrit :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho\vec{g} = \vec{0}$$

3. Un pendule constitué d'une masse m retenue par un fil de longueur ℓ est suspendu à l'avant de la camionnette. Montrer que la mesure de la position d'équilibre du pendule permet de déterminer l'accélération de la camionnette.

Exercice 2 - Pendule dont une extrémité oscille

On étudie un pendule simple constitué d'une bille M de masse m , attachée à une barre AM de longueur ℓ et de masse négligeable. La liaison pivot en A , permettant la rotation de la barre, est considérée comme parfaite. L'extrémité A est animée d'un mouvement de translation selon l'axe (Oy) horizontal :

$$y_A = y_o \cos(\omega t)$$

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à A , en translation par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$.

1. Faire un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur le système. Exprimer le moment des actions en A .
2. Exprimer le moment cinétique de M en A (comme la masse de la barre est négligeable, le moment cinétique du système { barre, bille } est celui de la bille).
3. Appliquer le théorème du moment cinétique en projection sur (Az) . Comment se simplifie l'équation du mouvement dans le cas des petites oscillations ?
4. Proposer une méthode permettant de résoudre l'équation obtenue.

Exercice 3 - Champ de pesanteur

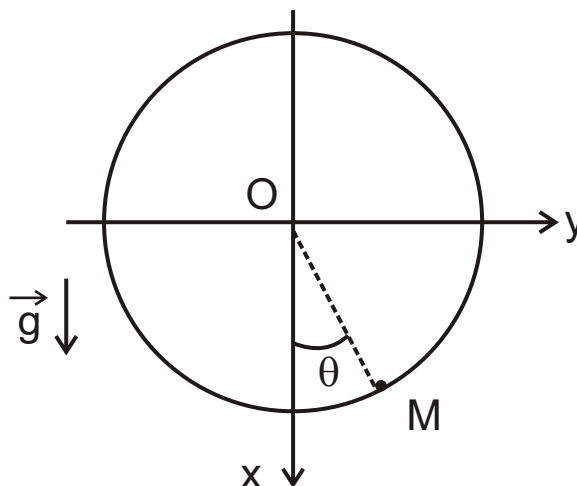
Pour définir le poids d'un corps, on imagine que celui-ci est accroché à un fil. Le poids est alors l'opposé de la tension du fil qui maintient le corps en équilibre. Si on tient compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre, le poids est alors la somme de la force de gravitation exercée par la Terre et de la force d'inertie d'entraînement.

1. Pourquoi ne tient-on pas compte de la force d'inertie de Coriolis ?
2. Déterminer l'inclinaison α du poids par rapport à la verticale pour un objet situé à une latitude λ .
3. Vérifier que la valeur maximale de α est de l'ordre du milliradian.

Exercice 4 - Positions d'équilibre d'un anneau sur un cerceau en rotation

Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m est astreint à coulisser sans frottement sur la circonférence d'un cercle de rayon R_o . Le cercle est en rotation uniforme $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_x$ autour de l'axe (Ox) par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. On repère la position de la bille par la donnée de l'angle θ représenté sur la figure ci-dessous. On recherche les positions d'équilibre de la bille.

1. Pourquoi peut-on dire que la force de Coriolis est nulle dans ces conditions ?
2. Donner l'expression de la force d'inertie d'entraînement en utilisant les coordonnées cylindriques. Quelle est l'énergie potentielle associée $E_{p,e}$? Exprimer $E_{p,e}$ en fonction de m , R_o , ω et θ .
3. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p,p}$ en fonction de m , g , R_o et θ .
4. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(\theta)$. On se place à grande vitesse angulaire, montrer qu'il existe une position d'équilibre θ_{eq} non nulle. Discuter sa stabilité.



Exercice 5 - Mouvement d'une portière

La portière d'une voiture est restée entrouverte au moment où le véhicule se met à freiner avec une décélération constante a . La portière est modélisée par une plaque verticale, rectangulaire, homogène, de masse m , de largeur l et de hauteur h . On note J , son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation. On repère la position de la portière par l'angle θ qu'elle fait avec l'aile de la voiture. La liaison pivot entre la portière et la voiture est supposée parfaite.

On admet que la force d'inertie d'entraînement est appliquée au centre de masse de la portière.

1. La portière va-t-elle se fermer ou s'ouvrir ?
2. Écrire l'équation différentielle du mouvement.
3. Déterminer la vitesse de rotation de la portière quand elle fait un angle de 90° avec l'aile.

Exercice 6 - Pendule de Foucault

On considère un pendule constitué par une masse ponctuelle M de masse m reliée au point O par un fil inextensible de longueur ℓ suffisamment grande pour que le mouvement de M puisse être considéré comme plan. On se place dans le référentiel terrestre. Dans le cadre de l'étude, on étudie l'effet de la rotation de la Terre sur le mouvement du pendule en considérant uniquement la composante du vecteur $\vec{\Omega}$ suivant la verticale $\vec{e}_z$ et on notera :

$$\vec{\Omega}_z = \omega \vec{e}_z \text{ et } \vec{g} = -g \vec{e}_z$$

avec $\omega = \Omega_T \sin \lambda$, λ désignant la latitude du point considéré.

1. Le point M se déplace dans le plan (Oxy) , donner l'expression de la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}$ subie par M .
2. Dans le cas d'un fil de grande longueur, la projection de la tension du fil dans le plan (Oxy) peut s'écrire :

$$\vec{T} = -m\omega_o^2(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \text{ avec } \omega_o^2 = \frac{g}{\ell}$$

En déduire le système d'équations différentielles couplées vérifiées par $x(t)$ et $y(t)$.

3. Montrer que :

$$X = x + iy$$

est alors solution de l'équation :

$$\ddot{X} + \omega_o^2 X = -2i\omega \dot{X}$$

4. Proposer une expression pour $X(t)$ en considérant $\omega \ll \omega_o$ (on ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration).

Complément - résolution numérique : Au lieu de poser $X = x + iy$, on utilise la fonction **odeint** de la bibliothèque **scipy.integrate** pour résoudre l'équation différentielle :

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{v}_x = -\omega_o^2 x + 2\omega v_y$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_y = -\omega_o^2 y - 2\omega v_x$$

On peut alors déterminer la rotation du plan des oscillations sur une durée de 2h. Vérifier sur les résultats que le plan contenant le mouvement a tourné d'environ 22° en 2h. En effet, pour une latitude de 45° , on a :

$$\omega = \frac{360}{24} \sin(45) = 11^\circ/\text{h}$$

On commence par créer les variables nécessaires

```
In [14]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

g=9.8
L=67
a=g/L
w=2*5.4e-5 #2*omegaT . sin(lambda)
```

On crée ensuite une fonction qui prend en entrée $[x, v_x, y, v_y]$ et qui renvoie la liste des dérivées :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= -a * x + w * v_y \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_y &= -a * y - w * v_x\end{aligned}$$

```
In [15]: def EquationPendule(X,t):
x,vx,y,vy=X
return[vx,-a*x+w*vy,vy,-a*y-w*vx]
```

On rentre les conditions initiales

```
In [32]: xo=0.45
vx0=0
yo=0
vy0=0
t=np.linspace(0,7200,100000)
```

On utilise odeint pour résoudre l'équation différentielle.

```
In [33]: from scipy.integrate import odeint
s=odeint(EquationPendule,[xo,vx0,yo,vy0],t)
```

```
In [36]: x=s[:,0]
y=s[:,2]
plt.plot(x,y)
#plt.xlim(-0.5,0.5)
#plt.ylim(-0.5,0.5)
plt.show()
```

