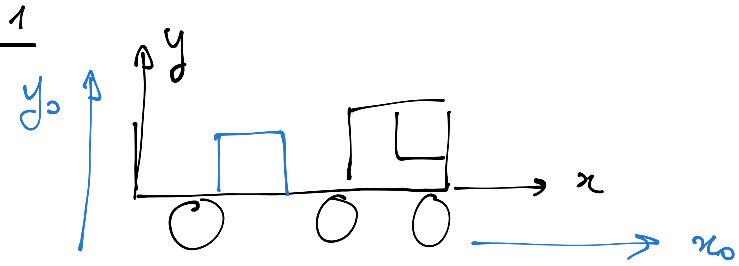
Mécanique - TD2 - Référentiels non galiléens

Exercice 1

1)



$\mathcal{R}_0$ = référentiel terrestre supposé galiléen

$\mathcal{R}$: en translation par rapport à $\mathcal{R}_0$ avec une accélération

$\vec{a} = a\,\vec{u_x}$

On se place dans $\mathcal{R}$

Système = caisse de masse m

BAME : * Poids $\vec{P} = -m g \vec{u_y}$

* Réaction du support $\vec{R} = T\,\vec{u_x} + N\,\vec{u_y}$

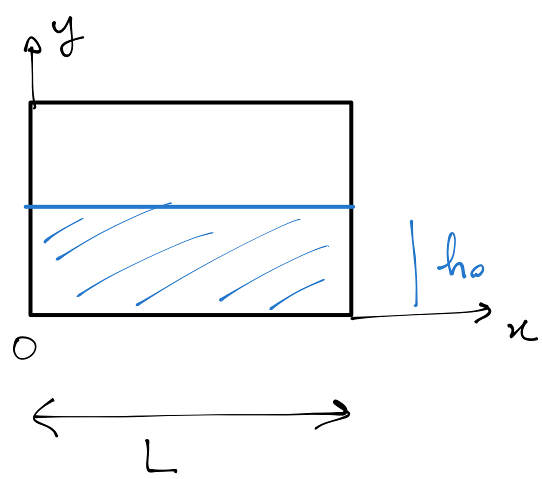
* Force d'inertie d'entrainement $\vec{f_{ie}} = -m a \vec{u_x}$

Loi de la résultante cinétique dans $\mathcal{R}$ (cas du non glissement)

$$\begin{cases} 0 = T - m a \\ 0 = N - m g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = m a \\ N = m g \end{cases} \quad \text{et } T < f N$$

Le glissement commence pour $T = f N$ soit $\boxed{a = f g}$

2)



La force d'inertie d'entrainement volumique s'écrit :

$$\vec{f_{ie\,v}} = -\rho\, a\, \vec{u_x}$$

(ρ = masse volumique)

Le fluide est en équilibre dans $\mathcal{R}$ $\Leftrightarrow$ $-\rho a \vec{u_x} - \rho g \vec{u_y} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P = \vec{0}$

Soit
$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\rho a \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \end{cases}$$

On intègre par rapport à x à y constant :

$$P(x,y) = -\rho a x + C(y)$$

On dérive à nouveau par rapport à y à x constant :

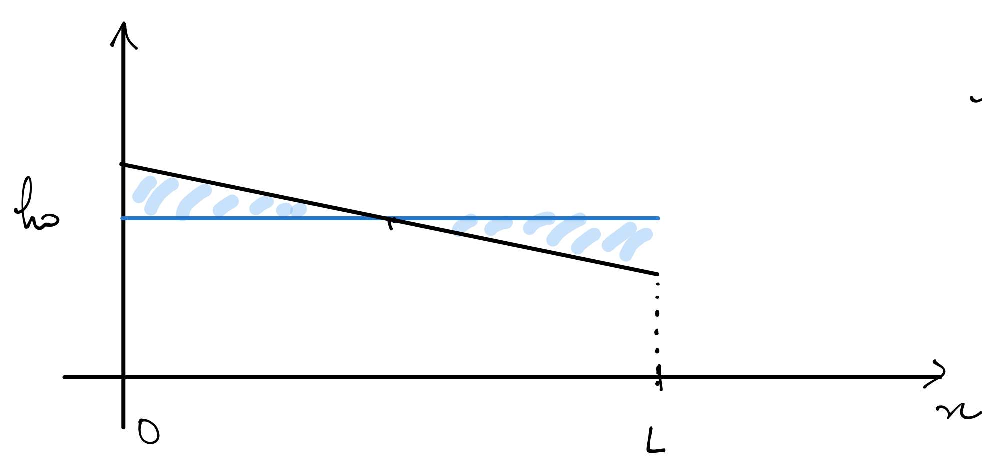
$$\frac{\partial P}{\partial y} = C'(y) \quad \Rightarrow \quad C(y) = C_0 - \rho g y$$

$$\Rightarrow \quad P(x,y) = -\rho a x - \rho g y + C_0$$

La surface du liquide correspond à $P(x, h(x)) = P_0$

$$\Rightarrow \quad -\rho a x - \rho g h(x) = P_0 - C_0$$

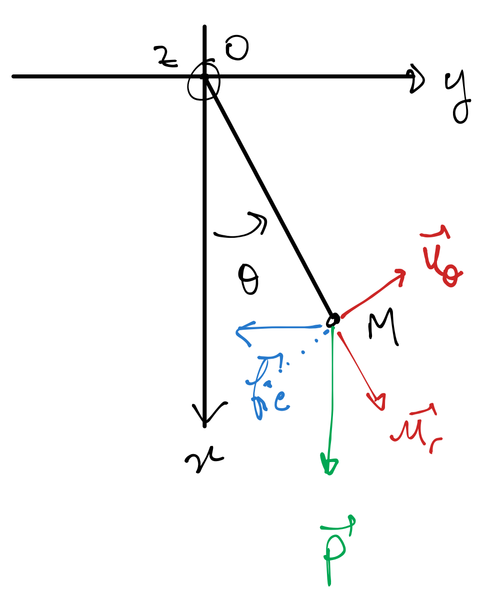
Soit $\boxed{h(x) = A - \frac{a}{g} x}$



$h\left(\frac{L}{2}\right) = h_0$ (conservation du volume)

$$\Rightarrow \boxed{h(x) = h_0 - \frac{a}{g}\left(x - \frac{L}{2}\right)}$$

3)



On note $\vec{a} = a \vec{u_y}$ l'accélération de la camionnette par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen.

BAME : . poids $\vec{P} = m g \vec{u_x}$

. Tension du fil $\vec{T} = -T \vec{u_r}$

. force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f_{ie}} = -m a \vec{u_y}$$

Loi du moment cinétique en O : $\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{f_{ie}})$

Le pendule est à l'équilibre $\Leftrightarrow$ $\vec{L_0}$ = constante

$\vec{\mathcal{M}_0}(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ car $\vec{OM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires

On a donc : $\boxed{\vec{\mathcal{M}_0}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{f_{ie}}) = \vec{0}}$ à l'équilibre

$\vec{P} = mg\cos\theta\, \vec{u_r} - mg\sin\theta\, \vec{u_\theta}$; $\vec{OM} = l\vec{u_r}$

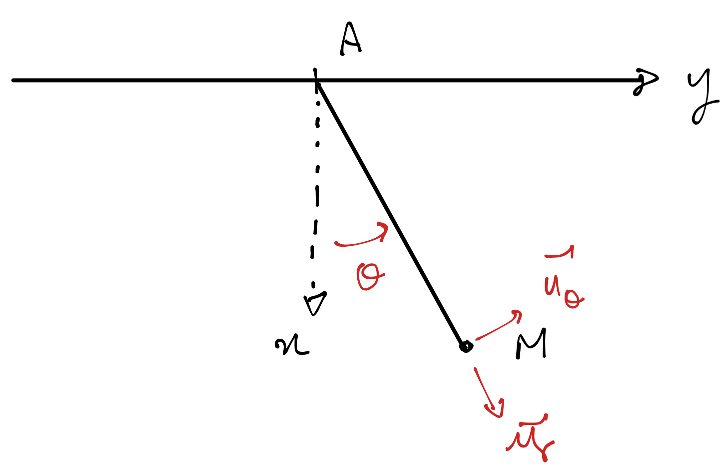
$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{P}) = -mgl\sin\theta\, \vec{u_z}$

$\vec{f_{ie}} = -ma\sin\theta\, \vec{u_r} - ma\cos\theta\, \vec{u_\theta} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{f_{ie}}) = -mal\cos\theta\, \vec{u_z}$

L'équilibre correspond donc à : $-mgl\sin\theta_{eq} - mal\cos\theta_{eq} = 0$

soit $\boxed{\tan\theta_{eq} = \frac{-a}{g}}$ $\Rightarrow$ on peut mesurer a en mesurant θ_{eq}.

Exercice 2



$\mathcal{R}'$ non galiléen :

Accélération d'entrainement

$\vec{a_e} = \ddot{y}_A\, \vec{u_y}$

$= -\omega^2 y_0 \cos(\omega t)\, \vec{u_y}$

1) Poids : $\vec{P} = mg\,\vec{u_x}$

$= +mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}_A}(\vec{P}) = -mgl\sin\theta\,\vec{u_z}$

Actions de liaison : pivot parfait $\Rightarrow \mathcal{M}_{z,\text{liaison}} = 0$

Force d'inertie d'entrainement : $\vec{f_{ie}} = -m\vec{a_e}$

$\Rightarrow \vec{f_{ie}} = m y_0 \omega^2 \cos(\omega t)\,(\cos\theta\,\vec{u_\theta} + \sin\theta\,\vec{u_r})$

$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}_A}(\vec{f_{ie}}) = m y_0 l \omega^2 \cos(\omega t)\cos\theta\,\vec{u_z}$

2) Le moment cinétique de la bille en A :

$$\vec{L}_A(\text{bille}) = \vec{OA} \wedge m\vec{v}_A$$
$$= l\vec{u_r} \wedge m\, l\dot{\theta}\, \vec{u_\theta}$$
$$= m\, l^2 \dot{\theta}\, \vec{u_z}$$

3) Loi du moment cinétique sur (Az) :

$$m\, l^2 \ddot{\theta} = -mgl\sin\theta + m\, y_0 \omega^2 l \cos(\omega t)\cos\theta$$

Dans le cas des petites oscillations : $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$

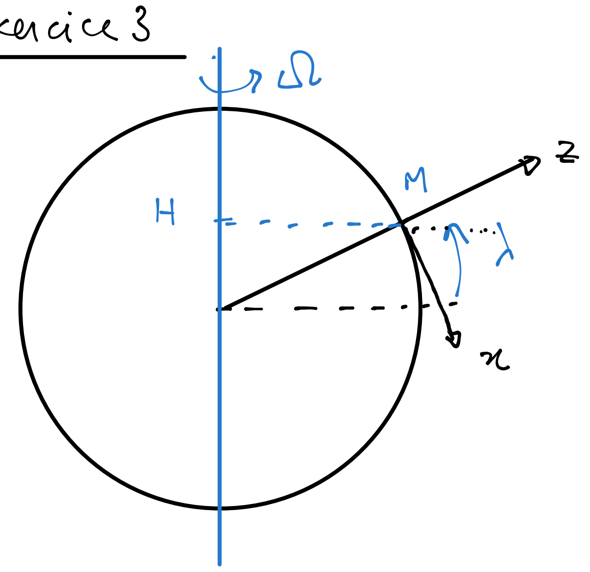
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{y_0}{l}\omega^2 \cos(\omega t)}$$

4) Il faut passer en complexe : $\theta(t) = \mathrm{Re}(\underline{\theta}(t))$ avec $\underline{\theta}(t) = \underline{\theta_0}\, e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \underline{\theta_0} = \frac{\frac{y_0 \omega^2}{l}}{\frac{g}{l} - \omega^2}$$ $\rightarrow$ résonance pour $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \omega_0$

Rq : • si on tient compte des frottements on a un système de type passe-haut d'ordre 2.
• La solution trouvée diverge pour $\omega = \omega_0$ $\Rightarrow$ si θ devient trop grand l'hypothèse petits angles n'est plus valable, il faut reprendre l'équation avec $\cos(\theta)$ et $\sin\theta$.

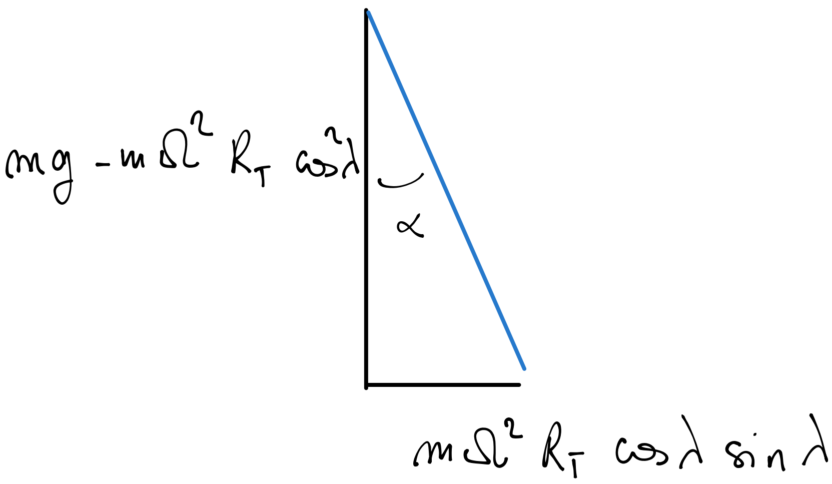
Exercice 3



1) Dans la définition du poids, le corps est considéré comme étant à l'équilibre dans le référentiel terrestre :

$$\vec{f_{ic}} = -2m\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v_r}$$
$$= \vec{0} \quad \text{car } \vec{v_r} = \vec{0}$$

2) $$\vec{P} = -mg\,\vec{u_z} + m\Omega^2\,\overrightarrow{HM}$$
$$= -mg\,\vec{u_z} + m\Omega^2 R_T \cos\lambda\left(\cos\lambda\,\vec{u_z} + \sin\lambda\,\vec{u_x}\right)$$



$$\tan\alpha = \frac{m\Omega^2 R_T \cos\lambda \sin\lambda}{mg - m\Omega^2 R_T \cos^2\lambda}$$

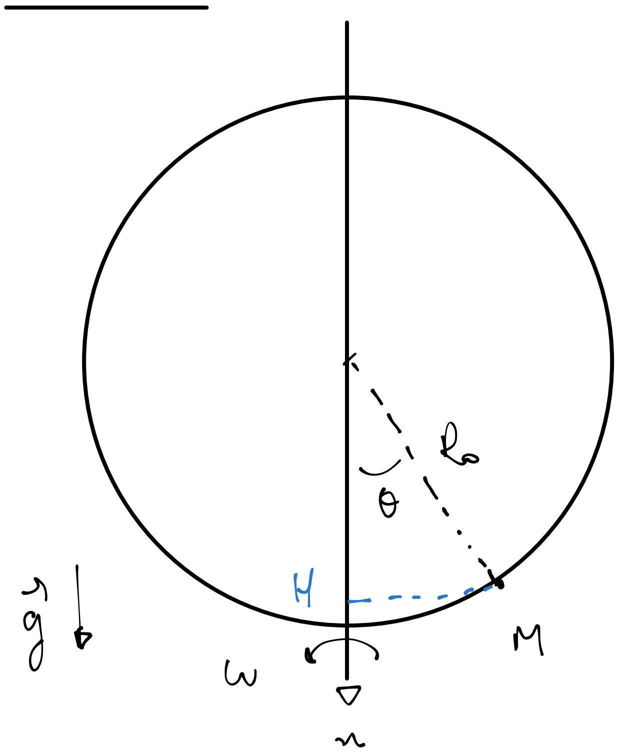
$$\Omega^2 R_T = 3{,}4.10^{-2} \quad m.s^{-2}$$
$$\ll g$$

On a donc $$\tan\alpha \simeq \frac{\Omega^2 R_T \sin(2\lambda)}{2g} \simeq \alpha$$

3) La valeur maximale de α correspond à $\lambda = 45°$, $\sin(2\lambda) = 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 1{,}7\,.10^{-3} \text{ rad}}$$

Exercice 4



1) Comme dans l'exercice 3 : on recherche des positions d'équilibre dans le référentiel
$\Rightarrow \vec{v_r} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f_{ic}} = \vec{0}$

2) En coordonnées cylindriques :
$$\vec{f_{ie}} = m\omega^2\,\overrightarrow{HM}$$
$$= m\omega^2 r\,\vec{u_r}$$
$$= -\frac{dE_{p,e}}{dr}\,\vec{u_r}$$

avec $$E_{pe} = -m\omega^2 \frac{r^2}{2} + E_{po}$$ constante d'intégration

$r = R_0 \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{pe} = -m\omega^2 \frac{R_0^2}{2}\sin^2\theta + E_{po}}$

3) $E_{p,p} = -mgx$ dans cette situation.

(écrire par exemple $\vec{P} = -\vec{\text{grad}}\, E_{p,p}$)

$\Rightarrow$ $E_{p,p} = -mgR_0\cos\theta$ (+ éventuellement une constante mais on peut choisir $E_p(x=0)=0$)

4) $$\boxed{E_{p,tot} = -mgR_0\cos\theta - m\frac{\omega^2}{2}R_0^2\sin^2\theta + E_{p0}}$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgR_0\sin\theta - m\omega^2R_0^2\sin\theta\cos\theta$$
$$= \sin\theta\left(mgR_0 - m\omega^2R_0^2\cos\theta\right)$$

Les positions d'équilibre sont obtenues pour $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$

$\sin\theta = 0$ ou $\cos\theta = \frac{g}{R_0\omega^2}$) possible si $\omega^2 \geq \frac{g}{R_0}$

On dérive une seconde fois :

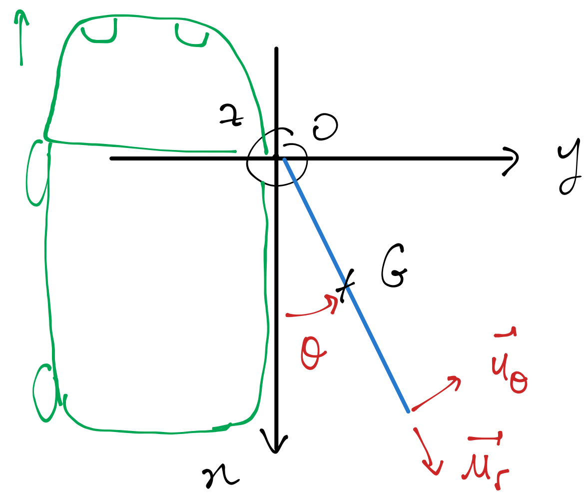
$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = \cos\theta\left(mgR_0 - m\omega^2R_0^2\cos\theta\right) + m\omega^2R_0\sin^2\theta$$

Pour $\cos\theta_{eq} = \frac{g}{R_0\omega^2}$ on obtient :

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = \frac{g}{R_0\omega^2}\underbrace{\left(mgR_0 - m\omega^2R_0^2\frac{g}{R_0\omega^2}\right)}_{=0} + \underbrace{m\omega^2R_0\sin^2\theta_{eq}}_{>0}$$

$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0 \Rightarrow$ cette position d'équilibre est stable quand elle existe

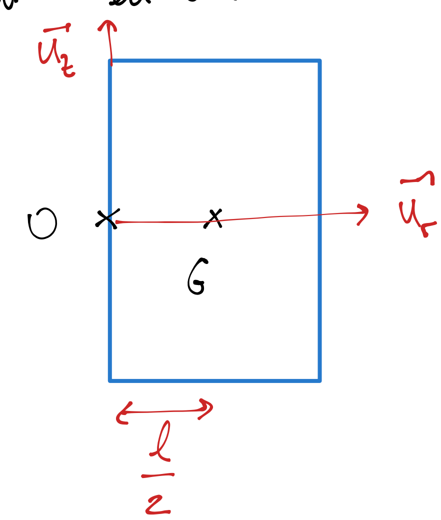
Exercice 5 _ Mouvement d'une portière



$\mathcal{R}$: référentiel lié à la voiture en translation avec $\vec{a} = a\,\vec{u}_x$ ($a>0$ car la voiture ralentit) par rapport à $\mathcal{R}_0$ référentiel terrestre supposé galiléen.

1) La force d'inertie d'entrainement $\vec{f}_{ie} = -m\,a\,\vec{u}_x$ qui s'applique en G a un moment en O :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ie}) = \vec{OG} \wedge \vec{f}_{ie}$$



$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ie}) = m\,a\,\frac{l}{2}\sin\theta\,\vec{u}_z$$

qui provoque l'ouverture de la porte.

2) On applique le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ par rapport à (Oz). La liaison pivot est considérée comme parfaite ($\mathcal{M}_{z,liaison} = 0$), le poids est suivant $\vec{u}_z$, on a donc $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{J\,\ddot{\theta} = m\,a\,\frac{l}{2}\sin\theta}$$

3)

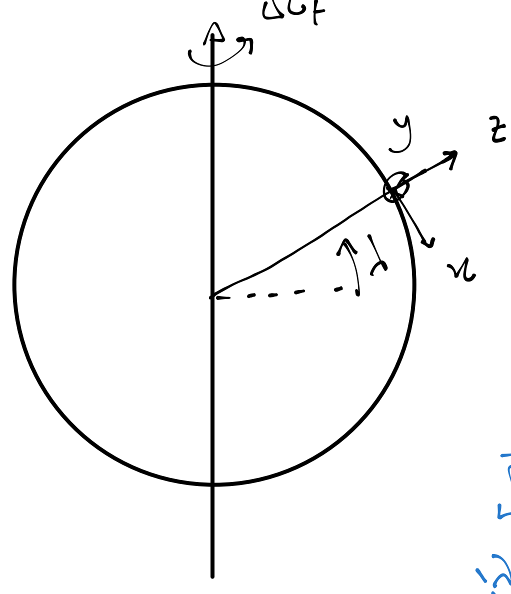
$$J\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = m\,\frac{l}{2}\,a\,\dot{\theta}\sin\theta$$

on intègre entre $t=0$, $\theta=0$, $\dot{\theta}=0$ et t, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}_0$

$$\Rightarrow J\,\frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = m\,\frac{l}{2}\,a\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}\right)$$

soit $$\boxed{\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{m\,l\,a}{J}}}$$

Exercice 6

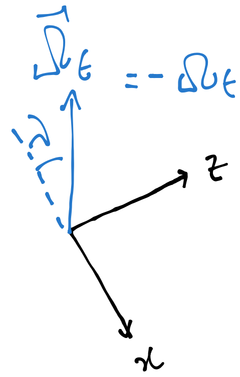


$\mathcal{R}_0$ = référentiel géocentrique

$\mathcal{R}$ = référentiel terrestre en rotation par rapport à $\mathcal{R}_0$.

1) $\vec{F}_{ic} = -2m\,\vec{\Omega}_t \wedge \vec{v}_r$

$\vec{\Omega}_t = -\Omega_t \cos\lambda\, \vec{u}_x + \Omega_t \sin\lambda\, \vec{u}_z$

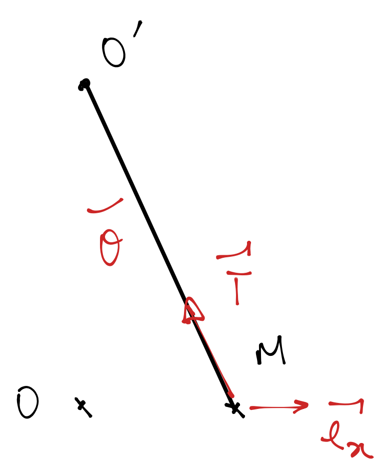


$\vec{v}_r = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ic} = -2m\,\underbrace{\Omega_t \sin\lambda}_{\omega}\, \vec{u}_z \wedge (\dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y)$$

$$= -2m\omega\dot{x}\,\vec{u}_y + 2m\omega\dot{y}\,\vec{u}_x$$

2)



* $T\cos\theta \simeq mg$ si on considère que le mouvement est dans (Oxy)

$\Rightarrow T \simeq mg$ pour θ petit

Pour $\vec{OM}$ colinéaire à $\vec{e}_x$: $\begin{cases} T_x = -mg\sin\theta \\ \sin\theta = \dfrac{x}{\ell} \end{cases}$

soit $T_x = -mg\dfrac{x}{\ell}$

On obtient bien $\vec{T} = -m\omega_0^2 (x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y)$ dans le cas général.

PFD dans $\mathcal{R}$ en projection sur (Oxy)

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + 2m\omega\dot{y} & (1) \\ m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y - 2m\omega\dot{x} & (2) \end{cases}$$

3) On pose $X = x + iy$

$$(1) + i(2) \Rightarrow \underbrace{(\ddot{x} + i\ddot{y})}_{\ddot{X}} = -\omega_0^2 \underbrace{(x+iy)}_{X} + 2\omega \underbrace{(\dot{y} - i\dot{x})}_{-i\dot{X}}$$

Soit
$$\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = -2i\omega \dot{X}}$$

4) Polynôme caractéristique : $r^2 + 2i\omega r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = -4\omega^2 - 4\omega_0^2$$
$$\simeq -4\omega_0^2 \quad \text{si} \quad \omega^2 \ll \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \quad r = -i\omega \pm i\omega_0$$

$$\Rightarrow \quad X(t) = \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{rotation du plan contenant les oscillations}} \underbrace{\left(X_0 \cos(\omega_0 t) + X_1 \sin(\omega_0 t)\right)}_{\text{oscillations à } \omega_0 \text{ d'un pendule de longueur } l}$$

rotation du plan contenant les oscillations

oscillations à ω_0 d'un pendule de longueur l