Mécanique quantique - TD1

Exercice 1 - Émission d'un photon

Un électron est confiné dans un puits quantique formé d'une couche de GaAs (matériau semi-conducteur) prise en sandwich entre deux couches de GaAlAs.
Pour déterminer les états stationnaires de l'électron, on considère une particule quantique de masse m_e^*=0,067m_e (où $m_e = 9,1.10^{-31}$kg est la masse de l'électron) évoluant dans un puits de potentiel infini, de largeur a=3,0 nm. On considère la transition du niveau d'énergie n=2 au niveau d'énergie fondamental n=1.

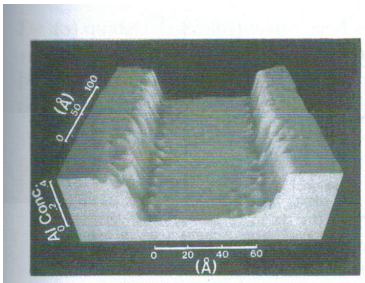


FIGURE 4.5: Sandwich de Al Ga As – Ga As – Al Ga As. La partie centrale en Ga As a une largeur de 6 nm. Sur l'axe vertical est portée la concentration en aluminium. Le relief correspond à la variation du potentiel « vu » par un électron de conduction (potentiel électrostatique moyenné sur une période spatiale du réseau cristallin). Photographie due à Abbas Ourmazd, ATT Bell Labs.

FIGURE 1 – Mécanique quantique, J-L Basdevant, J. Dalibard

Déterminer la longueur d'onde de la radiation émise lors de cette transition. La situer dans le spectre électromagnétique.

Exercice 2 - Interaction nucléaire entre un proton et un neutron

On considère les états liés d'une particule quantique de masse m dans le puits de potentiel suivant :

$$V(x) = +\infty \text{ pour } x < 0,\ V(x) = V_o < 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq a \text{ et } V(x) = 0 \text{ pour } x > a.$$

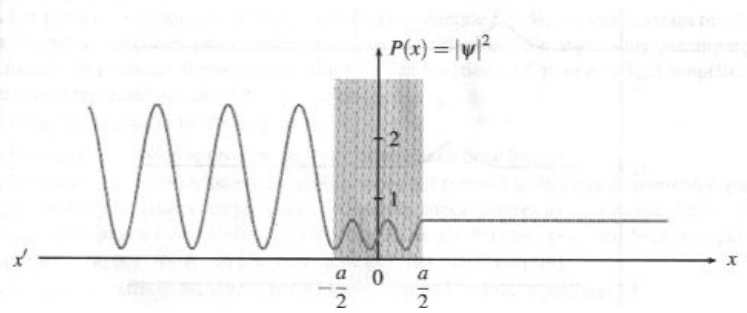
La fonction d'onde représentant un état stationnaire d'énergie E s'écrit sous la forme :

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\exp(-iEt/\hbar)$$

1. Expliciter les conditions aux limites qui s'imposent à la fonction propre $\varphi(x)$.
2. Montrer sans calcul comment on peut déterminer les différentes énergies des états stationnaires liés. En déduire la condition d'existence d'au moins un état lié pour le système étudié ici.
3. On utilise ce modèle pour décrire l'interaction nucléaire entre un proton et un neutron dans un noyau d'hydrogène.
   (a) Expliquer pourquoi le potentiel choisi permet de modéliser cette interaction.
   (b) L'expérience montre qu'il n'existe qu'un seul état lié, appelé "deutéron". En déduire que V_o est compris entre deux valeurs V_{min} et V_{max} que l'on exprimera.

Exercice 3 - Évolution d'une particule quantique dans un potentiel inconnu

Un faisceau de particules quantiques incidentes, de masse m et d'énergie E, provient de $x \to -\infty$. Chaque particule est astreinte à se déplacer le long de l'axe (Ox). Elle est soumise à un potentiel *V(x)*, constant par morceaux, nul lorsque x tend vers $\pm\infty$.
Sur le graphe suivant est représentée la densité de probabilité de présence *P(x)* d'une particule quantique. Les oscillations qui apparaissent sont sinusoïdales.



1. L'état de chaque particule est-il un état lié ou un état de diffusion ?
2. Quelle interprétation peut-on donner aux oscillations de densité de probabilité de présence pour $x \leq -a/2$?
3. Déterminer l'allure possible de *V(x)*.
4. Proposer une expression de la fonction d'onde pour les différentes régions de potentiel. Donner les conditions de raccordement qui doivent être vérifiées en $\pm a/2$.

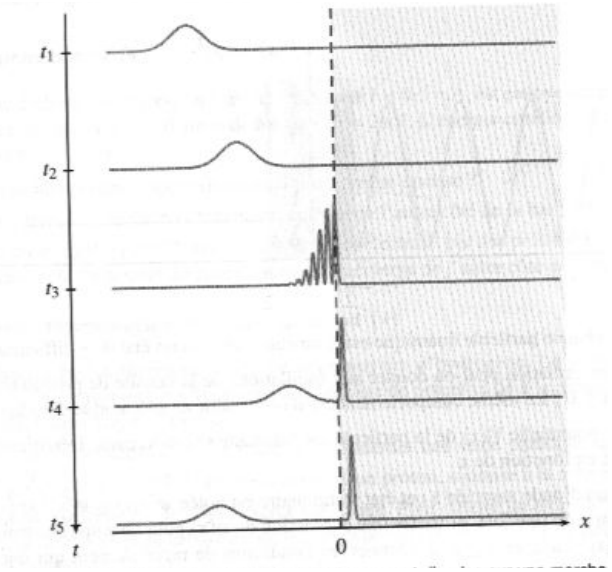
Exercice 4 - Enrichissement isotopique

On étudie le mouvement d'une particule quantique dans le potentiel *V(x)* (marche de potentiel) défini par :

$$V(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \text{ et } V(x) = V_o \text{ pour } x \geq 0.$$

On envisage le cas d'une particule d'énergie $E > V_o$. On pose $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_o)}}{\hbar}$

1. Montrer qu'un état stationnaire de la particule peut être représenté par la fonction d'onde propre : $\varphi(x) = A\exp(ik_1x) + rA\exp(-ik_1x)$ pour $x < 0$ et $\varphi(x) = tA\exp(ik_2x)$ pour $x \geq 0$.
2. Écrire les relations de raccordement en $x = 0$ et en déduire les expressions de r et t. Examiner le cas $E \gg V_o$ et commenter.
3. En superposant des états stationnaires d'énergies voisines de E, on forme un paquet d'ondes représentant une particule incidente. La figure ci-dessous représente son évolution temporelle (le temps s'écoule du haut vers le bas). Commenter l'allure du paquet d'ondes aux différents instants.



4. Une source envoie depuis $-\infty$ un faisceau de particules quantiques constitué d'un mélange de deux isotopes, on se place dans le cas $E \gg V_o$.
   (a) Donner l'expression approchée de la probabilité de réflexion $R = r^2$.
   (b) On note m_1 et m_2 les masses des deux isotopes qui forment le faisceau de particules. Toutes les particules sont envoyées avec la même vitesse. Expliquer pourquoi les coefficients de réflexion diffèrent pour les deux isotopes et exprimer le rapport R_1/R_2 en fonction de m_1/m_2.
   (c) Le faisceau réfléchi est-il enrichi en isotope le plus lourd ou le plus léger ?

Exercice 5 - Courant tunnel

Un faisceau d'électrons, correspondant à une intensité I=0,1mA, est envoyé sur une barrière de potentiel de largeur d=1,0nm et de hauteur V_o=2eV. L'énergie cinétique d'un électron incident est E=1,0eV.

1. Estimer la profondeur de pénétration par effet tunnel δ. Peut-on se placer dans l'approximation d'une barrière épaisse ?
   On peut alors écrire la probabilité de transmission sous sa forme approchée :
$$T \simeq 4 \exp\left(\frac{-2d}{\delta}\right)$$
2. En déduire un ordre de grandeur de l'intensité du courant tunnel qui émerge de l'autre côté de la barrière.

Exercice 6 - Effet tunnel et radioactivité alpha

L'isotope radioactif $^{212}_{83}$Bi du bismuth se désintègre en l'isotope $^{208}_{81}$Tl du thallium en émettant une particule α ($^4_2$He) d'énergie E=6,0 MeV. On rappelle, dans le domaine des faibles valeurs, l'expression approchée du facteur de transmission tunnel T dans le cas d'une barrière de hauteur V_o et de largeur a, pour une particule de masse m, d'énergie E :
$$T \simeq \frac{16E(V_o - E)}{V_o^2} \exp\left[-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_o - E)}\right]$$

1. Déterminer la distance r_o entre le noyau de thallium et la particule α pour laquelle l'énergie E est égale à l'énergie électrostatique. Évaluer numériquement cette distance.
   On donne $\varepsilon_o = 8,85.10^{-12}\text{F.m}^{-1}$.
2. Le rayon R d'un noyau de nombre de masse A est donné par la formule $R = R_o A^{1/3}$ avec R_o=1,2 fm. Déterminer la valeur numérique de R pour le thallium. En déduire la valeur V_b du maximum de potentiel dans lequel évolue la particule α à l'extérieur du noyau.
3. En choisissant comme valeur approchée de la barrière $V_o = V_b/2$, évaluer la valeur numérique du coefficient de transmission T.
4. En déduire un ordre de grandeur de la durée de vie moyenne τ de l'isotope radioactif du bismuth.