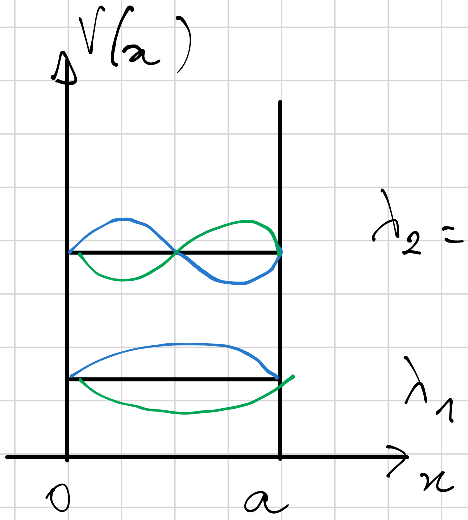
# Mécanique quantique – TD 1




$\lambda_2 = a \qquad k_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda_2} \qquad E_2 = 4E_1$

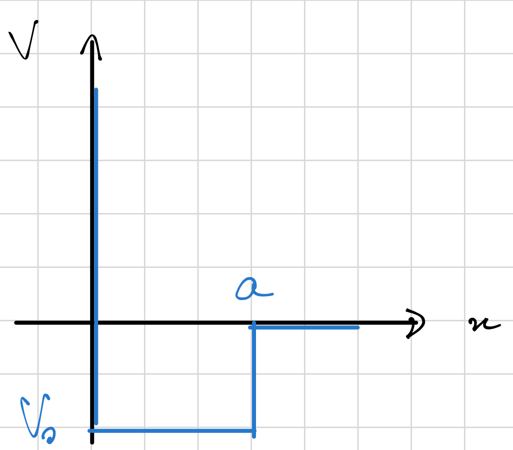
$\lambda_1 = 2a \qquad k_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda_1} \qquad E_1 = \dfrac{p_1^2}{2m} = \dfrac{h^2}{8\,m^*\,a^2}$

Le passage du niveau d'énergie $n=2$ au niveau d'énergie $n=1$ correspond à l'émission d'un photon d'énergie $h\nu = E_2 - E_1$

avec $\nu = \dfrac{c}{\lambda_0} \rightarrow \lambda_0 = \dfrac{hc}{E_2 - E_1} = \dfrac{8\,c\,m^*\,a^2}{3h}$

A.N : $\lambda_0 = 6{,}6 \cdot 10^{-7}$ m rayonnement visible de couleur rouge.

## Exercice 2



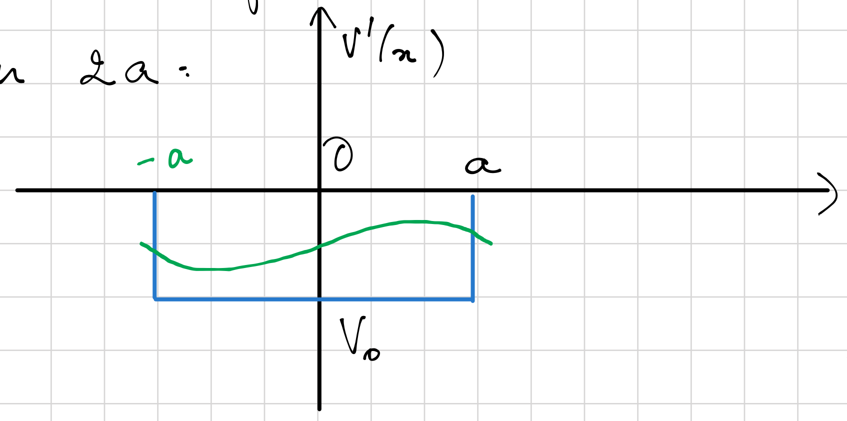

1) En $x=0$ : discontinuité infinie de $V(x)$

$\Rightarrow \varphi(0) = 0$

En $x = a$ : discontinuité finie de $V(x)$

$\varphi$ et $\varphi'$ sont continues en $x = a$.

2) Les états stationnaires liés ont une énergie $V_0 < E < 0$. On peut simplifier le problème en se ramenant à l'étude des états antisymétriques (dont les fonctions d'onde s'annulent en $x=0$) d'un puits de largeur $2a$ :




Etat lié de plus basse énergie :

$\lambda_1 \simeq 2a$ (légèrement supérieur à cause de l'onde évanescente)

$\rightarrow \quad p_1 = \dfrac{h}{\lambda_1} = \dfrac{h}{2a}$ , l'énergie associée :

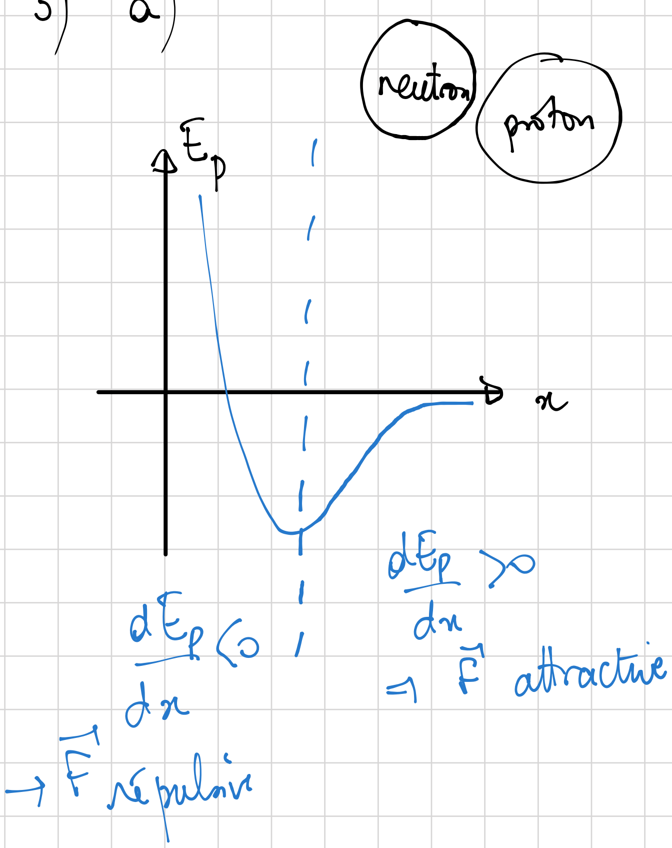
$$E_1 = \frac{p_1^2}{2m} + V_0 \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{h^2}{8ma^2} + V_0}$$

En réalité $\lambda_1$ est un peu supérieur à $2a$ et la valeur de $E_1$ pour un puits de profondeur finie est légèrement inférieure à la valeur ci-dessus.

Pour qu'il y ait au moins un état lié on doit avoir $E_1 < 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{h^2}{8ma^2} < -V_0}$$

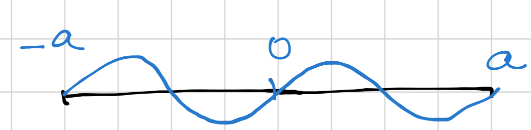
3) a)




modèle de sphères dures : * répulsion à très courte distance (le proton ne peut pas se trouver à la position occupée par le neutron)

* attraction à plus grande distance liée à l'interaction forte.

b) L'état suivant correspondrait à $\lambda_2 = a$




$$E_2 = \frac{h^2}{2ma^2} + V_0$$

Cet état lié n'existe pas si $E_2 > 0$ soit $-V_0 < \dfrac{h^2}{2ma^2}$

Finalement :

$$\boxed{\frac{h^2}{8ma^2} < -V_0 < \frac{h^2}{2ma^2}}$$

# Exercice 3

1) Les particules se déplacent de $x \to -\infty$ à $x \to +\infty$ : il s'agit d'état de diffusion.

2) Pour $x < -\frac{a}{2}$, $\Psi(x,t)$ correspond à la superposition de l'onde incidente et de l'état correspondant à la réflexion de la particule au niveau de la discontinuité de potentiel en $-\frac{a}{2}$

$$\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad \text{avec} \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$|\varphi|^2 = |A|^2 + |B|^2 + \underbrace{A.B^* e^{2ikx} + A^* B e^{-2ikx}}_{\to \cos(2kx + \phi)} \quad \left(V(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

$\downarrow$ oscillation de période spatiale $\frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$

3) On observe également des oscillations dans la zone $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, on doit avoir :

$$\varphi'(x) = A' e^{ik'x} + B e^{-ik'x} \quad \text{dans cette zone}$$

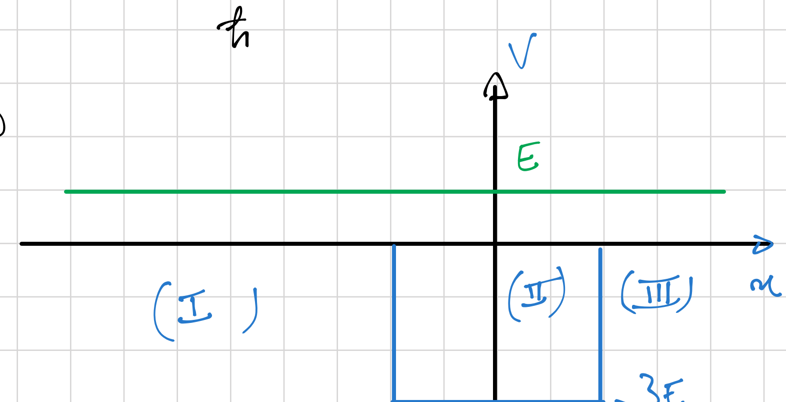
$$E = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + V_0$$

Les oscillations observées ont une période spatiale 2 fois plus faible dans la zone $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ que dans la zone $\left]-\infty, -\frac{a}{2}\right]$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{k} = 2\frac{\pi}{k'} \Rightarrow k' = 2k$$

$$\frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} = 2\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

soit $E - V_0 = 4E \Rightarrow V_0 = -3E < 0$



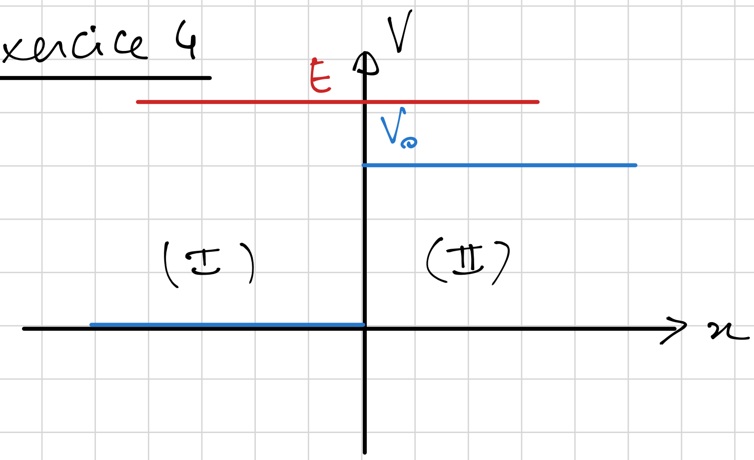
4) Zone (1) : $\varphi_I(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}$ $\quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Zone (2) $\quad \varphi_{II}(x) = A'\,e^{ik'x} + B'\,e^{-ik'x}$ $\quad k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

Zone (3) $\quad \varphi_{III}(x) = A''\,e^{ikx}$ $\quad$ (même $k$ que dans la zone I)

Continuité de $\varphi$ et $\varphi'$ en $\pm\frac{a}{2}$.

Exercice 4




1) Dans la zone (I) $V(x) = 0$, $\varphi_I(x)$ est solution de :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi_I(x) = E\,\varphi_I(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_I(x) + k_1^2\,\varphi_I(x) = 0 \quad \text{avec } k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \varphi_I(x) = A\,e^{ik_1x} + B\,e^{-ik_1x}$$
$$= A\,e^{ik_1x} + rA\,e^{-ik_1x} \qquad \left(r = \frac{B}{A}\right)$$

Dans la zone (II), $V(x) = V_0 < E$, $\varphi_{II}(x)$ est solution de :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''_{II}(x) + V_0\,\varphi_{II}(x) = E\,\varphi_{II}(x)$$

soit $\quad \varphi''_{II}(x) + k_2^2\,\varphi_{II}(x) = 0 \quad$ avec $\quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

$$\Rightarrow \varphi_{II}(x) = C\,e^{ik_2x} + \underbrace{D\,e^{-ik_2x}}_{0}$$ $\rightarrow$ pas d'obstacle en $+\infty$

$$= tA\,e^{ik_2x}$$

avec $\quad t = \frac{C}{A}$

2) Continuité de $\varphi$ et $\varphi'$ en $x = 0$ : $\begin{cases} A + rA = tA \\ k_1A - rk_1A = k_2tA \end{cases}$

Soit $\begin{cases} t - r = 1 \\ k_2 t + k_1 r = k_1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} t = \dfrac{2k_1}{k_1+k_2} \\ r = \dfrac{k_1 - k_2}{k_1+k_2} \end{cases}}$

Pour $E \gg V_0$ $k_2 \simeq k_1$ : $r \to 0$ , $t \to 1$ la discontinuité de potentiel influe peu sur la fonction d'onde.

3) Entre $t_1$ et $t_2$ le paquet d'ondes se propage à $v_{g_1} = \dfrac{d\omega}{dk_1}$

À $t_3$ : dans la ~~zone~~ $x<0$ il y a superposition entre le paquet d'ondes incident et le paquet d'ondes réfléchi : on observe des oscillations de $|\Psi|^2$ liées au terme d'interférence.

Entre $t_4$ et $t_5$ on observe la propagation des ondes réfléchies et transmises ( $v_{g_2} = \dfrac{d\omega}{dk_2} < v_{g_1}$ )

4) a) $R = r^2$ $\qquad k_2 = \dfrac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\left(1 - \dfrac{V_0}{E}\right)^{1/2}$

Pour $V_0 \ll E$ , on peut écrire $k_2 \simeq k_1 \left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{V_0}{E}\right)$

On a alors :

$$R = \left(\frac{k_1 \frac{1}{2}\frac{V_0}{E}}{2k_1}\right)^2 = \frac{V_0^2}{16E^2}$$

b) $E_1 = \dfrac{1}{2} m_1 v^2$ $\qquad E_2 = \dfrac{1}{2} m_2 v^2$ $\qquad$ (même vitesse $v$)

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-2}$$

Si $m_1 > m_2$ alors $R_1 < R_2$ : le faisceau réfléchi est enrichi en isotope le plus léger.

## Exercice 5

1) Dans la zone correspondant à la barrière :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V_0\varphi(x) = E\varphi(x) \qquad \text{avec } V_0 > E$$

$$\Rightarrow \quad \varphi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) = 0$$

On pose $\delta = \dfrac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$ A.N : $\delta = 2{,}0.10^{-10}$ m

$\delta \ll d$ : on peut se placer dans l'approximation d'une barrière épaisse

2) On estime : $T \simeq 4 \exp\left(\dfrac{-2.10^{-9}}{2.10^{-10}}\right) = 1{,}8.10^{-4}$

$I_{tunnel} = T\,I \Rightarrow I_{tunnel} = 18$ nA

## Exercice 6

Noyau Tl: $81e$ Particule $\alpha$: $4e$

Rappel : énergie potentielle électrostatique

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Ici $q_1 = 81\,e$ et $q_2 = 4\,e$

$$\Rightarrow \quad r_0 = \frac{81 \times 4 \times e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_p} \qquad \text{avec } E_p = 6.10^6 \times \underbrace{1{,}6.10^{-19}}_{e}\ \text{J}$$

A.N : $\boxed{r_0 = 39 \text{ fm}}$

2) Pour le thallium $A = 208 \Rightarrow R = 7{,}1$ fm

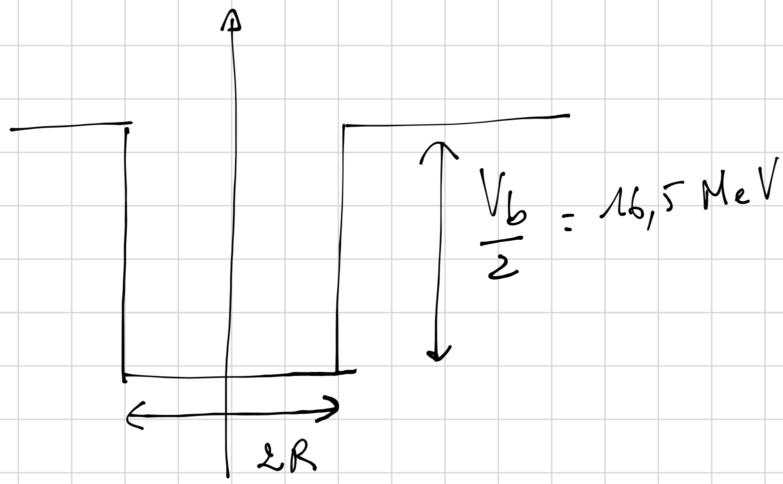
On calcule $E_p = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{E}{R} r_0$

A.N :

$$E_p = 6 \times \frac{39}{7{,}1}\ \text{MeV} = 33\ \text{MeV} = V_b$$

3) Pour $V_0 = \frac{V_b}{2}$ on trouve $T = 1{,}6 \cdot 10^{-39}$

4)




idée : la particule $\alpha$ de masse $m$ d'énergie $E$ fait des aller-retour à la vitesse $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ dans un puits de largeur $2R$

$\rightarrow$ tous les $t = \frac{2R}{v}$ la particule rencontre une barrière et a la probabilité $T$ de la traverser. En notant $\tau$ la durée de vie de l'isotope radioactif du bismuth, on a :

$$\frac{\tau}{t} T = 1 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{T} 2R \sqrt{\frac{m}{2E}}}$$

A.N : $\tau = 5{,}3 \cdot 10^{17}$ s (environ 17 milliards d'années)