Thermodynamique - TD1- Diffusion thermique

Exercice 1 - Équation de la chaleur en présence d'une source d'énergie

On considère un matériau ohmique de conductivité électrique σ, de masse volumique ρ, de conductivité thermique K et de capacité calorifique massique c. Ce conducteur a la forme d'un cylindre d'axe (Ox) et de section S. Il est parcouru par un courant continu d'intensité i. On suppose que la température à l'intérieur du cylindre ne dépend que de x et du temps t.

1. On se place tout d'abord dans le cas $i = 0$. Établir l'équation de la chaleur vérifiée par la température en faisant un bilan d'énergie pour la tranche comprise entre x et $x + dx$.
2. Le cylindre est maintenant parcouru par un courant d'intensité i non nulle.
   (a) Quelle est la puissance électrique volumique cédée au cylindre ?
   (b) Reprendre le bilan énergétique en tenant compte de ce nouveau terme.

Exercice 2 - Association de résistances thermiques

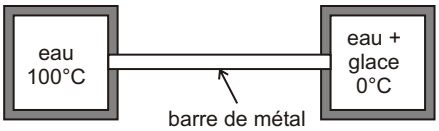
On se place en régime permanent.

1. On considère une vitre d'épaisseur e, de surface S et de conductivité thermique λ. La température est T_e à l'extérieur et T_i à l'intérieur de la pièce. Exprimer la résistance thermique de la vitre et le flux thermique qui la traverse. Application numérique : calculer R_{Th} et Φ.
2. On considère maintenant un double vitrage constitué de deux vitres d'épaisseur e, de surface S, de même conductivité thermique λ, séparées par une couche d'air d'épaisseur e'. La conductivité thermique de l'air est notée λ'. Reprendre les mêmes questions, conclure.
3. Déterminer la répartition des températures dans le double vitrage, en particulier les températures aux interfaces verre-air et air-verre. On donne :

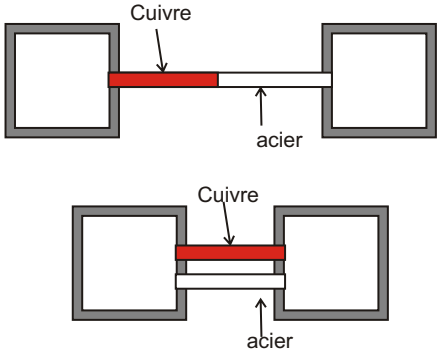
$$\lambda = 1,2 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1} \lambda' = 0,025 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$$

$$e = e' = 1\text{mm} \ ; \ \theta_e = 7^o\text{C} \ ; \ \theta_i = 17^o\text{C} \ ; \ S = 0,5 \text{ m}^2$$

4. On considère maintenant le dispositif ci-dessous : Les parois sont adiabatiques. Si la barre de



métal est en cuivre, la glace fond en 20 minutes. Si elle est en acier, elle fond en 40 minutes. En combien de temps fond la glace dans les deux configurations suivantes :



Exercice 3 - Conduction thermique entre deux sphères concentriques

On considère un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de centre O, de rayons a et $b > a$, de conductivité thermique λ, de capacité calorifique c et de masse volumique ρ. Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures $T_1(r = a)$ et $T_2(r > b)$ avec $T_2 > T_1$.

1. Indiquer le sens du transfert thermique sur un schéma. Montrer que le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th} = j_{th}(r,t)\ \vec{u}_r$.
2. On considère le système élémentaire constitué par deux sphères concentriques de rayons r et $r + dr$.
   (a) Quel est le volume de ce système ? En déduire la variation d'énergie interne dU de ce système entre les instants t et $t + dt$.
   (b) Exprimer le transfert thermique reçu par le système entre t et $t + dt$.
   (c) En déduire l'équation aux dérivées partielles que vérifie la température T en un point M tel que $a < r < b$.
3. Déterminer en régime permanent :
   (a) La température $T(r)$ en tout point M du matériau ;
   (b) La puissance $\mathcal{P}$ transférée entre les deux sphères de rayons a et b ;
   (c) La résistance thermique R_{Th} de ce conducteur. Calculer $\mathcal{P}$ et R_{Th}.

   Données :
   $a = 1$ cm ; $b = 10$ cm ; $\lambda = 3,5.10^{-2}$ W.m^{-1}.K^{-1} ; T_1=20°C ; T_2= 100°C.

Exercice 4 - Onde de température

Le sous-sol est considéré comme un milieu semi-infini, homogène, de conductivité thermique K, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, situé dans le demi-espace x>0. On suppose que la température à la surface du sol (plan x=0) est soumise à des variations sinusoïdales :

$$T_S(t) = T_o + \theta_o\ cos(\omega t)$$

1. À quels phénomènes correspondent ces variations sinusoïdales. Quel est l'intérêt d'une telle modélisation ?
2. On cherche $T(x,t)$ sous la forme :

$$T(x,t) = T_o + \theta(x,t)$$

$$\theta(x,t) = \Re e(\underline{\theta}) \text{ avec } \underline{\theta} = f(x)e^{i\omega t}$$

   (a) Quelle est l'équation vérifiée par la fonction f ?
   (b) En déduire la température $T(x,t)$ en un point M de profondeur x
3. On considère des variations journalières de températures, la température variant entre 0° C la nuit et 16°C le jour. À partir de quelle profondeur, les variations de températures sont-elles inférieures à 1°C ?
4. On considère des variations annuelles de température, la température variant entre -10°C et 26°C. Reprendre la question précédente.
   Donnée :

$$\frac{K}{\rho c} = 6.10^{-7}\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}$$

Exercice 5 - Ailette de refroidissement

Une ailette de refroidissement est constituée par un cylindre d'axe (Ox), de rayon r, de longueur L, de conductivité thermique λ, de capacité calorifique massique c et de masse volumique ρ, fixé par sa base $x = 0$ à une paroi dont la température est T_1 et en contact avec l'air ambiant de température T_e. Le flux surfacique passant de l'ailette à l'air ambiant est donné par la loi de Newton :

$$\varphi_{ailette \to air} = h(T - T_e)$$

où T est la température locale de l'ailette. On se place en régime stationnaire et on suppose que la température locale dans l'ailette ne dépend que de x.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.
2. Montrer que $T(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$T(x) = A\ exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B\ exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + T_e$$

   où δ est une constante à déterminer.
3. Quelles sont les conditions aux limites du problème ? On montre alors que :

$$A = \frac{(T_1 - T_e)\alpha exp(-2L/\delta)}{1 + \alpha exp(-2L/\delta)} \text{ et } B = \frac{(T_1 - T_e)}{1 + \alpha exp(-2L/\delta)} \text{ où } \alpha = \frac{\lambda - h\delta}{\lambda + h\delta}$$

   .
4. Que peut-on dire de A et B lorsque $L \gg \delta$? Simplifier alors l'expression de $T(x)$. Dans les questions qui suivent on supposera $L \gg \delta$.
5. Déterminer la puissance thermique $P_{ailette \to air}$.
6. Calculer le rapport de la puissance $P_{ailette \to air}$ à la puissance que la paroi évacuerait à travers la surface πr^2 en l'absence de l'ailette (on supposera que le coefficient h est le même pour la paroi et pour l'ailette). Quel est l'intérêt de l'ailette ?

Données :

$$\lambda = 389 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1} \ ; \ h = 155 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$$

$$r = 1 \text{ mm}, \ L = 10 \text{ cm}$$

Exercice 6 - Barreau cylindrique chauffé par une réaction nucléaire

Une réaction nucléaire a lieu dans un barreau cylindrique de rayon a, d'axe (Ox). Elle dégage la puissance q par unité de volume. La conductivité thermique du barreau est notée K. L'air extérieur est à la température T_e uniforme, le coefficient de transfert thermique à la surface barreau-air est noté h. On se place en régime permanent. On considère le barreau assez long pour que la température T ne dépende que de r, distance d'un point du barreau à l'axe (Ox).
Déterminer la température $T(r)$ dans le barreau. Quelle est sa valeur maximale ?

Exercice 7 - Plongée sous-marine

Un plongeur est équipé de sa combinaison. On note T_e la température de l'eau environnante, uniforme et constante. La température initiale du plongeur est $T_{io} = 310$ K.

1. Rappeler l'expression de la résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel en fonction de la section S, de l'épaisseur e et de la conductivité thermique λ. En déduire la valeur de la résistance R_{combi} associée à la combinaison.
2. On modélise les pertes par convection thermique par un flux surfacique :

$$\varphi_c = h(T - T_e)$$

   Quelle résistance thermique R_c peut-on associer aux pertes par convection ?
3. On modélise les pertes par rayonnement par un flux surfacique :

$$\varphi_r = \sigma(T^4 - T_e^4)$$

   On suppose $T - T_e \ll T_e$, montrer que l'on peut associer une résistance thermique R_r aux pertes par rayonnement.
4. On modélise le contact peau-combinaison par une résistance thermique R_{peau}. Quelle est alors la résistance thermique équivalente à l'ensemble en fonction de R_r, R_c, R_{combi} et R_{peau} ?
   L'application numérique donne environ 0,1 K.W^{-1}
5. On se place en régime lentement variable. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T_i(t)$ sachant que la puissance thermique produite par le métabolisme humain est $p = 120$ W et que sa capacité thermique massique $c = 3,5\text{kJ.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$.
6. Au bout de combien de temps le plongeur est-il en hypothermie - c'est-à-dire que sa température corporelle est descendue à 35° C ?

Données :
- Masse du plongeur : 75kg
- $R_{peau} = 3,0.10^{-2}\text{K.W}^{-1}$
- Surface totale de sa combinaison $S = 1,3\text{m}^2$, épaisseur $e = 3$mm, $\lambda_{combi} = 4,4.10^{-2}\text{W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$
- $h = 10\text{W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,7.10^{-8}\text{W.m}^{-2}\text{.K}^{-4}$
- Température de l'eau $T_e = 278$K.