Électromagnétisme - TD5 - Dipôle oscillant

Exercice 1 - Rayonnement d'une particule chargée

On donne l'expression du champ magnétique à proximité d'une particule de charge q se déplaçant avec une accélération $\vec{a} = a(t)\vec{u}_z$ au voisinage d'un point O :

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_o}{4\pi rc} q\ a(t - r/c)\sin\theta\vec{u}_\varphi$$

1. Rappeler les hypothèses correspondant au cadre de l'étude du rayonnement d'un dipôle oscillant.
2. Déduire des équations de Maxwell (utiliser formulaire pour exprimer le rotationnel en coordonnées sphériques) l'expression du champ électrique rayonné.
3. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting .
4. En déduire la formule de Larmor donnant la puissance rayonnée par une particule chargée non relativiste :
$$\mathcal{P} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2a^2}{3c^3}$$
5. Expliquer pourquoi ce résultat conduit à l'abandon du modèle planétaire de l'atome.

Exercice 2 - Modèle élémentaire d'antenne

Deux dipôles oscillants de moments dipolaires :

$$\vec{p}_1 = p_o\cos\left(\omega t - \omega\frac{a}{c}\right)\vec{u}_z\ ;\ \vec{p}_2 = p_o\cos\left(\omega t + \omega\frac{a}{c}\right)\vec{u}_z$$

sont placés aux points O_1 et O_2 de l'axe (Oz) de cotes respectives $z_1 = a$ et $z_2 = -a$. En un point M éloigné, on peut considérer que les champs ont été émis en O pour les facteurs géométriques mais pas pour exprimer les retards de propagation :

$$\frac{r_1}{c} = \frac{O_1M}{c} \text{ et } \frac{r_2}{c} = \frac{O_2M}{c}$$

Le champ rayonné par l'ensemble des deux dipôles s'écrit alors :

$$\vec{E} = \left(\ddot{p}_1(t - r_1/c) + \ddot{p}_2(t - r_2/c)\right)\frac{\mu_o\sin\theta}{4\pi r}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = \left(\ddot{p}_1(t - r_1/c) + \ddot{p}_2(t - r_2/c)\right)\frac{\mu_o\sin\theta}{4\pi rc}\vec{u}_\varphi$$

1. Exprimer r_1 et r_2 en fonction de r, a et θ en limitant les calculs à l'ordre 1 en a/r.
2. En déduire l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting en fonction de θ.
3. On se place dans le cas d'une antenne demi-onde pour laquelle $a = \lambda/2$. Tracer l'indicatrice de rayonnement. Dans quelles directions a-t-on $<\vec{\Pi}>=\vec{0}$? Interpréter sans calcul.

Exercice 3 - D'après CCINP MP 2022

On rappelle qu'un dipôle oscillant, constitué d'une charge fixe $+e$ au point O et d'un électron mobile au point P animé d'un mouvement forcé sur Oz, tel que $\overrightarrow{OP} = d\cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$, est caractérisé par son vecteur moment dipolaire $\overrightarrow{p(t)} = -e\overrightarrow{OP(t)}$.

Le champ électrique " lointain " créé par ce dipôle, en un point M " très éloigné " repéré en coordonnées sphériques $(r = OM, \theta, \phi)$ (**figure 1**), est donné par :

$$\vec{E} = \frac{ed\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin(\theta)}{r}\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\overrightarrow{e_\theta}. \qquad (1)$$

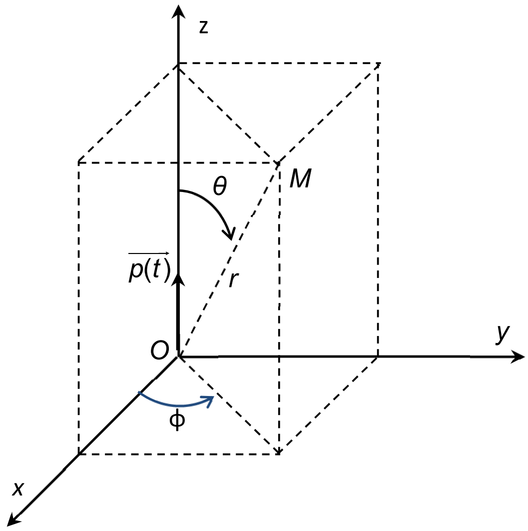

Figure 1 - Coordonnées sphériques d'un point M

Q1. Préciser ce que signifie " très éloigné ".

Q2. Justifier par des considérations de symétrie la direction du champ magnétique.

Q3. On donne l'expression du champ magnétique $\vec{B} = \frac{\mu_0 ed\omega^2}{4\pi c}\frac{\sin(\theta)}{r}\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\overrightarrow{e_\phi}\right)$. Pourquoi dit-on que l'onde est localement plane ?

Q4. Écrire le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à l'onde.

Q5. Calculer le flux de celui-ci à travers une sphère de centre O et de rayon r très grand.

Q6. En déduire quelle est l'énergie moyenne temporelle rayonnée par l'électron.

Q7. **a)** Montrer que la puissance moyenne, appelée puissance de Larmor P_L, rayonnée par cet électron oscillant, peut s'écrire $P_L = K_e\langle\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}\rangle$ en appelant $\vec{\gamma}$ l'accélération de la particule chargée et mobile.

b) Donner l'expression de la constante K_e en fonction de c, e et de ε_0 et indiquer sa dimension, puis son unité.