Electromagnétisme - TD5 - Dipôle oscillant

Exercice 1

1) Si on note d la taille caractéristique du dipôle on considère :

$$d \ll \lambda \ll r$$

$\lambda \ll r$: on se place dans la zone de rayonnement

$d \ll r$: approximation dipolaire

L'hypothèse $d \ll \lambda$ revient à considérer les charges comme non relativiste

2) D'après l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

($\vec{j} = \vec{0}$ ici).

Formulaire : $\vec{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, B_\varphi\right)\vec{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r B_\varphi\right)\vec{u_\theta}$

Rq : $\frac{\partial}{\partial t}\left(a\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) = a'\left(t-\frac{r}{c}\right)$ $\qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(a\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) = -\frac{1}{c}a'\left(t-\frac{r}{c}\right)$

$\Rightarrow$ ① $\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta\,\frac{\mu_0}{4\pi r c}\,q\,a\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 c\, q}{4\pi r^2}\,2\cos\theta\; a\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

On intègre par rapport à t : $\boxed{E_r = \frac{\mu_0 c\, q}{4\pi r^2}\,2\cos\theta\; v\left(t-\frac{r}{c}\right)}$

② $\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0 q}{4\pi c}\,a\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin\theta\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_\theta}{\partial t} = \frac{1}{rc}\,\frac{\mu_0 q}{4\pi c}\,a'\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin\theta$$

On intègre : $\boxed{E_\theta = \frac{\mu_0 q}{4\pi r}\,a\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin\theta}$

Comparons les ordres de grandeur de E_r et E_θ :

$$\frac{E_r}{E_\theta} \simeq \frac{c\, v\, r}{r^2\, a} \simeq \frac{c}{r\,\omega} \simeq \frac{\lambda}{r} \ll 1$$ dans le cadre des hypothèses données en 1).

$a \simeq \omega v$

On peut donc négliger la composante suivant $\vec{u_r}$ et écrire :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r}\, a\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin\theta\ \vec{u_\theta}}$$

et on remarque $\vec{B} = \dfrac{\vec{u_r} \wedge \vec{E}}{c}$

3) Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 r^2 c}\, a^2\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin^2\theta\ \vec{u_r}}$$

4) On calcule le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une sphère de rayon r :

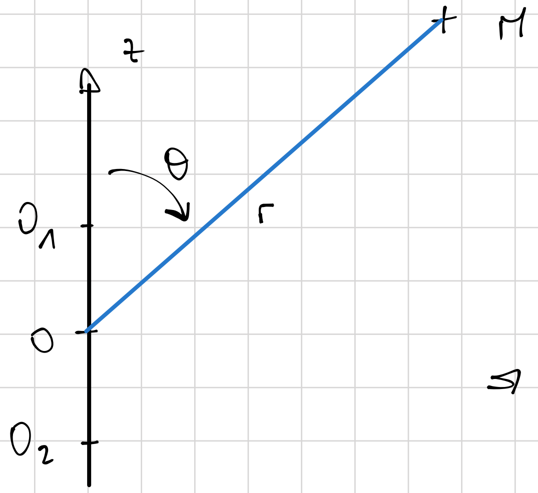
$$\mathcal{P} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 r^2 c}\, a^2\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin^2\theta\ r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\ \frac{4}{3} \times 2\pi$$

$$\mathcal{P} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 q^2 a^2}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{2}{3c} = \frac{q^2 a^2}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{2}{3c^3}$$

5) Dans le modèle planétaire de l'atome les électrons tournent autour du noyau comme les planètes autour du Soleil. Ils ont alors une accélération $\dfrac{v^2}{R}$ liée à leur rotation : ils devraient alors perdre de l'énergie par rayonnement et se rapprocher du noyau.

Exercice 2



1) On écrit :

$$O_1M^2 = \left(\vec{O_1O} + \vec{OM}\right)\cdot\left(\vec{O_1O} + \vec{OM}\right)$$
$$= r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

$$\Rightarrow O_1M = r\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}\cos\theta\right)^{1/2}$$
$$\simeq r\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right) \text{ à l'ordre 1 en } a/r$$
$$\simeq r - a\cos\theta$$

De même $r_2 \simeq r + a\cos\theta$.

2) $$\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \left(\ddot{p}_1\left(t-\frac{r_1}{c}\right) + \ddot{p}_2\left(t-\frac{r_2}{c}\right)\right)^2 \frac{\mu_0\sin^2\theta}{16\pi^2 r^2 c}\,\vec{u_r}$$

$$\left\langle \ddot{p}_1\left(t-\frac{r_1}{c}\right)^2\right\rangle = \left\langle \omega^4 p_0^2 \cos^2\left(\omega t - \omega\frac{a}{c} - \frac{\omega}{c}(r - a\cos\theta)\right)\right\rangle$$
$$= \frac{\omega^4 p_0^2}{2}$$
$$= \left\langle \ddot{p}_2^{\,2}\left(t-\frac{r_2}{c}\right)\right\rangle$$

$$\left\langle 2\,\ddot{p}_1\left(t-\frac{r_1}{c}\right)\ddot{p}_2\left(t-\frac{r_2}{c}\right)\right\rangle = \left\langle 2\omega^4 p_0^2 \cos\left(\omega\overbrace{\left(t - \frac{a}{c} - \frac{r}{c} + \frac{a\cos\theta}{c}\right)}^{\omega t - \varphi_1}\right) \times \cos\left(\omega\underbrace{\left(t + \frac{a}{c} - \frac{r}{c} - \frac{a\cos\theta}{c}\right)}_{\omega t - \varphi_2}\right)\right\rangle$$

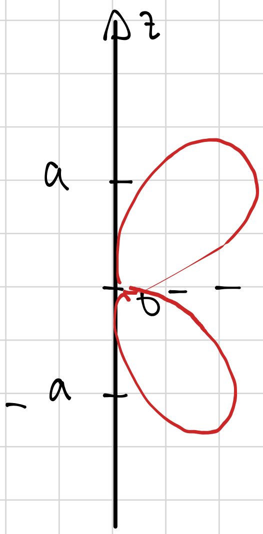
$$= \left\langle \omega^4 p_0^2 \cos\left(\omega\left(2t - \frac{2r}{c}\right)\right) + \omega^4 p_0^2 \cos\left(2\omega\frac{a}{c}(\cos\theta - 1)\right)\right\rangle$$
$$= \omega^4 p_0^2 \cos\left(2\omega\frac{a}{c}(\cos\theta - 1)\right)$$

$$\Rightarrow \langle\vec{\pi}\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi^2 r^2 c}\mu_0\sin^2\theta\left(1 + \cos\left(\underbrace{\frac{\omega}{c}2a(\cos\theta - 1)}_{\varphi_2 - \varphi_1}\right)\right)\vec{u_r}$$

→ Ressemble à la formule de Fresnel
$I(M) = 2I_0(1+\cos\varphi)$
φ interférences

3) Pour $2a = \frac{\lambda}{2}$, $\frac{2a\omega}{c} = \frac{\lambda\omega}{2c} = \pi$

$\langle \vec{\Pi} \rangle$ est proportionnel à $\sin^2\theta \left(1 + \cos\left(\pi(\cos\theta - 1)\right)\right)$



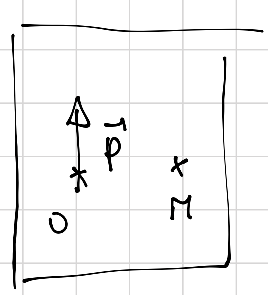
$r_1 = r_2$ dans le plan médiateur, le déphasage entre les champs générés par $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ est donc $\varphi = \frac{\omega a}{c} - \left(-\frac{\omega a}{c}\right) = \frac{2\omega a}{c} = \pi$

$\Rightarrow$ ils interfèrent donc de façon destructive.

Exercice 3

Q1. On doit avoir $r \gg d$ approximation dipolaire mais également $r \gg \lambda$ avec $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ pour se trouver dans la zone de rayonnement.

Q2.



Le plan contenant le dipôle est un plan de symétrie de la distribution : le champ magnétique $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan et donc suivant $\vec{e_\phi}$

Q3. Dans l'expression de $\vec{E}$, on peut écrire $\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \mu_0$, on a alors :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 e d \omega^2}{4\pi r} \sin\theta \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{e_r} \wedge \vec{E}}{c}$$

ce qui correspond à la relation de structure pour une onde plane se propageant suivant $\vec{e_r}$ dans le vide.

Le terme $\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$ correspond par contre à une onde sphérique $\Rightarrow$ ce n'est pas une onde plane.

Q4. $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = \dfrac{\mu_0 (ed\omega^2)^2}{16\pi^2 c} \dfrac{\sin^2\theta}{r^2} \cos^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) \vec{e_r}}$

Q5. On calcule le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une sphère de rayon r :

$$\mathcal{P} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 (ed\omega^2)^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \cos^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) r^2\sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 (ed\omega^2)^2}{16\pi^2 c} \cos^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) \times \frac{4}{3} \times 2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P} = \frac{\mu_0 e^2 d^2 \omega^4}{4\pi c} \frac{2}{3} \cos^2\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}$$

Q6. $\langle \mathcal{P} \rangle = \dfrac{\mu_0 e^2 d^2 \omega^4}{4\pi c} \times \dfrac{1}{3}$

Q7 a) On a $\vec{\gamma} = -\omega^2 d \cos(\omega t) \vec{e_z}$

$\Rightarrow \langle \vec{\gamma}.\vec{\gamma} \rangle = \omega^4 \dfrac{d^2}{2}$

$\left\{ \langle \mathcal{P} \rangle = \dfrac{\mu_0 e^2}{4\pi c} \times \dfrac{2}{3} \langle \vec{\gamma}.\vec{\gamma} \rangle \right.$

b) $K_e = \dfrac{\varepsilon_0 \mu_0 e^2}{4\pi c \varepsilon_0} \dfrac{2}{3} \Rightarrow \boxed{K_e = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{2}{3c^3}}$ (cf exercice 1)

$[K_e] = \dfrac{[\mathcal{P}]}{[\gamma^2]} = \dfrac{kg.m.s^{-2}.m.s^{-1}}{(m.s^{-2})^2}$ ← force × vitesse = puissance

K_e s'exprime en kg.s

$$\frac{e^2}{\varepsilon_0 c^3} = \frac{\text{force} \times L^2}{L^3.s^{-3}}$$

$$= \frac{kg \; m.s^{-2}}{m.s^{-3}} = kg.s$$