Révisions Oral - Mécanique

Les bons réflexes :

- Identifier le référentiel. Est-il galiléen ? Si non, décrire son mouvement (rotation ou translation) par rapport à un référentiel galiléen. → et déterminer les forces d'inertie
- Faire un schéma du système étudié accompagné éventuellement d'un bilan des forces. Vérifier que le repère choisi est bien direct.
- Prendre des angles de l'ordre de 30° (éviter 45°) pour faciliter les projections.
- Utiliser la formule :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

pour déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.
- En présence de ressort, vérifier que l'expression de la force écrite correspond bien à l'action du ressort en cas d'allongement. et $E_p = \frac{1}{2} k \times (\text{allongement})^2$
- Même en présence de frottements, la puissance des actions de contact peut être nulle dans le cas où il n'y a pas glissement.

$\mathcal{P} = (\vec{R}_T + \vec{R}_N) \cdot \vec{v}_g$ avec $\vec{v}_g \perp \vec{R}_N$

pas de frottement : $\vec{R}_T = \vec{0}$

pas de glissement : $\vec{R}_T \neq \vec{0}$ mais $\vec{v}_g = \vec{0}$

Oraux MPI - 2023 / 2024

[1] - (Niveau 2) :

Oral Centrale 2023

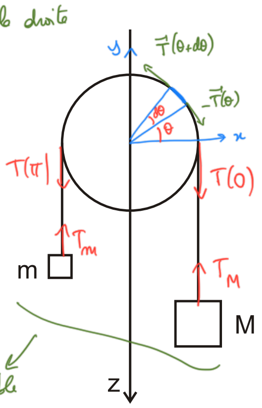
On considère un système de deux masses supposées ponctuelles m et $M \gg m$ reliées par une corde inextensible et une poulie soudée (qui ne tourne pas) qui rajoute un frottement solide de coefficient f. Étudier l'accélération de la masse M.

Prévisions : $M \gg m$

→ la corde va glisser vers la droite

$d\vec{R} = dR_n \vec{u}_r \underbrace{- dR_t \vec{u}_\theta}_{\text{opposée au mouvement}}$

avec $dR_t = f\, dR_n$ (lois de Coulomb) à la limite du glissement



fil inextensible

$\vec{a}_M = \ddot{z}\, \vec{u}_z$

$\vec{a}_m = -\ddot{z}\, \vec{u}_z$

PFD appliqué au bout de corde compris entre θ et $\theta + d\theta$:

non glissement → $\vec{0} = \vec{T}(\theta + d\theta) - \vec{T}(\theta) + dR_n \vec{u}_r - dR_t \vec{u}_\theta$

$$\frac{d\vec{T}}{d\theta} = \frac{dT}{d\theta} \vec{u}_\theta + T \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \frac{dT}{d\theta} \vec{u}_\theta - T \vec{u}_r$$

Rappel : si on écrit $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_r$ en coord. cartésiennes on montre que $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dT}{d\theta} = dR_t \\ -T = dR_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{d\theta} = -fT \quad \text{soit} \quad T = T_0 e^{-f\theta}$$

⇒ On applique ensuite un PFD à M avec $T_M = T_0$ et à m avec $T_m = T_0 e^{-f\pi}$ ⇒ équilibre pour $M e^{-\pi f} = m$

→ cf TP mécanique

oral Central 2023 aussi

[2] - (Niveau 2) :

On considère un système constitué de deux masses m et $M \gg m$ reliées par une ficelle inextensible de masse négligeable. On note respectivement f_s et f_d les coefficients de frottement statique et dynamique entre la masse M et le sol. Initialement, les deux masses sont au repos. La poulie est supposée parfaite.

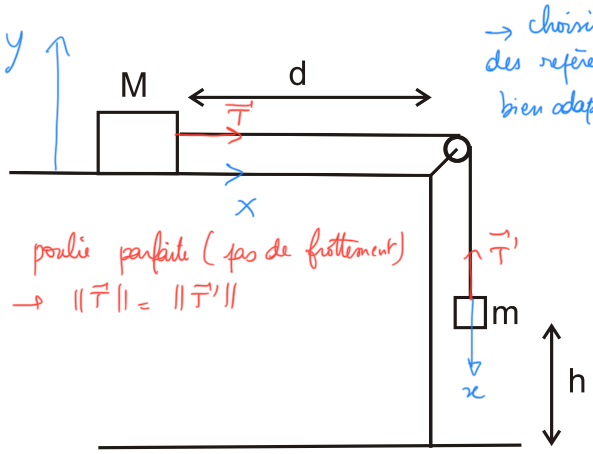
1 - Donner une condition sur le coefficient f_s pour que la masse m entraine la masse M.

2 - Déterminer la vitesse de la masse M lorsque la masse m touche le sol.

3 - En déduire une méthode pour calculer f_d à partir de cette vitesse.

4 - Proposer des ordres de grandeurs pour la mise en pratique de cette expérience.

→ choisir des repères bien adaptés



poulie parfaite (pas de frottement) → $\|\vec{T}\| = \|\vec{T}'\|$

& PFD ou approche énergétique

⚠ aux justifications

Théorème du moment cinétique appliqué au point O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\Gamma}$$

$$\Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} = +mg\ell\sin\theta - k\theta$$

[3] - (Niveau 1) :

On considère un point matériel M de masse m fixé au bout d'une tige de masse négligeable de longueur ℓ. La tige est retenue par un ressort spiral qui exerce un couple :

$$\vec{\Gamma} = -k\theta\vec{u}_z$$

avec k une constante de rappel.

1 - Établir une équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

2 - Résoudre cette équation dans le cas où θ est petit (on différenciera deux cas suivant les valeurs relatives de $mg\ell$ et k).

↳ oscillations si k grand, $\theta \nearrow$ si g l'emporte

3 - Montrer qu'il existe deux états d'équilibre (par symétrie) et que l'on a :

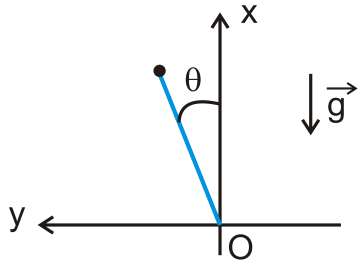
On refait par l'énergie potentielle $E_p = mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k\theta^2$

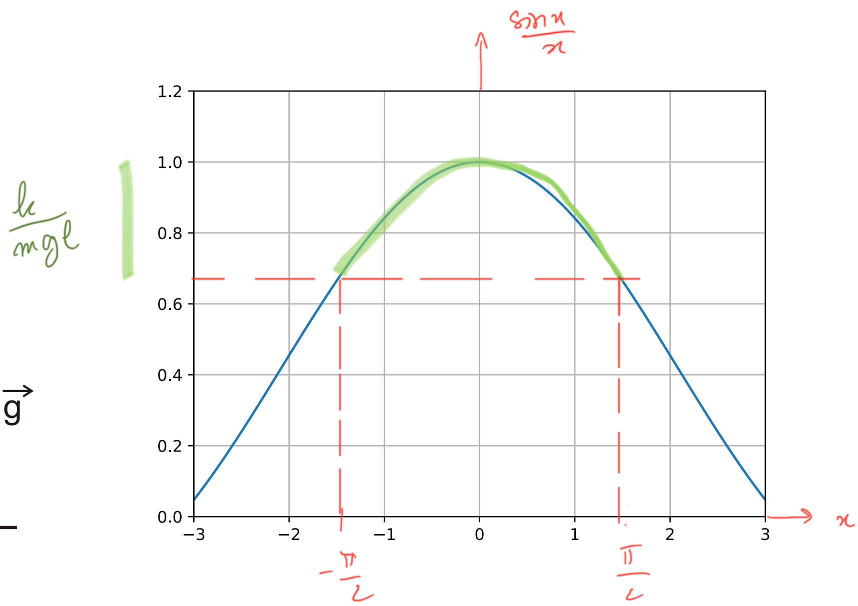
$$\frac{\sin(\theta_{eq})}{\theta_{eq}} = \frac{k}{mg\ell}$$

Rappel : la puissance mécanique associée au couple $\vec{\Gamma}$ est $\mathcal{P} = \vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega} \Rightarrow \mathcal{P} = -k\theta\dot{\theta} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}k\theta^2\right)}_{E_p}$

4 - À l'aide du graphe de $f(x) = \sin(x)/x$ donner les valeurs de $k/(mg\ell)$ sachant que $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

5 - Comment évolue la valeur de θ_{eq} si le référentiel d'étude est en translation avec une accélération $\vec{a} = a_o\vec{u}_x$ par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen.





[4] - (Niveau 2) :

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur un cerceau de rayon R qui tourne à la vitesse angulaire ω constante par rapport à l'axe vertical descendant (Ox).

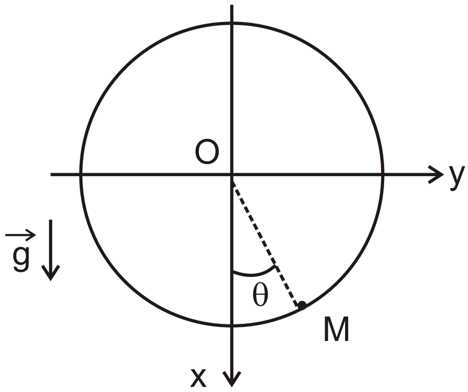
1 - Donner l'expression de l'énergie cinétique de M dans le référentiel lié au cerceau.

2 - Énoncer le théorème de l'énergie mécanique en précisant les conditions d'application.

3 - Donner l'expression de la force d'inertie d'entrainement et de la force d'inertie de Coriolis.

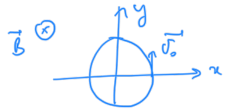
4 - Déterminer si elles sont conservatives ou non.

5 - Donner l'expression de l'énergie potentielle globale du point matériel M et étudier les positions d'équilibre et discuter leur stabilité.



il manque un bout d'énoncé

[5] - (Niveau 1) :
On lance une particule M de masse m et de charge $+e$ avec une vitesse initiale $\vec{v} = v_o\vec{e}_y$.
1 - Montrer que le mouvement initial de la particule est circulaire de rayon R_i à déterminer.
2 - Au bout de combien de temps passe-t-elle dans la zone dans laquelle le champ magnétique vaut $(B_o+b)\vec{e}_z$?
3 - Quel est le rayon de la trajectoire dans cette deuxième zone ?



$\vec{OM} = R\vec{e_r}$ $\vec{v} = v\vec{e_\theta}$ $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e_r}$ | mouvement circulaire uniforme

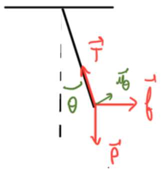
$m\vec{a} = e\vec{v}\wedge\vec{B}$

$\Rightarrow -m\frac{v^2}{R} = -evB$ soit $R = \frac{mv_0}{eB}$

Questions de cours

1 - Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ?
2 - Définir l'accélération d'entrainement. Quelle est son expression dans le cas d'un référentiel en translation par rapport au référentiel absolu ? dans le cas d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport au référentiel absolu ?
3 - Déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entrainement dans un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport au référentiel absolu. **4 -** Donner l'expression de l'accélération de Coriolis.
5 - Définir le poids d'un corps. Préciser la prise en compte des forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis dans la définition du poids.
6 - Énoncer les lois de Coulomb pour le frottement de glissement. On distinguera les coefficients de frottements statique et dynamique.
7 - Quels sont les deux situations pour lesquelles la puissance des actions de contact est nulle ?
8 - Donner l'expression de la force de Lorentz. Déterminer la valeur de la vitesse pour laquelle les contributions magnétiques et électriques sont du même ordre de grandeur pour $E = 10^4\text{V.m}^{-1}$ et $B = 1\text{T}$.
9 - Quelle est la puissance de la force de Lorentz ? Cette force est-elle conservative ? Si oui, quelle est l'expression de l'énergie potentielle associée ?
10 - Comment faire passer une particule de vitesse d'une vitesse nulle à une vitesse v_o ?
11 - Retrouver rapidement le rayon de la trajectoire circulaire d'une particule de charge q dans une zone où règne le champ B uniforme.

Des exercices pour s'entrainer



$\vec{T} + \vec{f} + \vec{P} = \vec{0}$ (équilibre)
↳ projection sur $\vec{u_\theta}$: $k\pi a^2 v_0^2\cos\theta - mg\sin\theta = 0$
↳ $k = 2{,}5$ kg.m^{-3} (⚠ bien préciser l'unité) il ne faut pas mettre "S.I." ici

[1]
On cherche à caractériser la force de traînée subie par une sphère de plomb de rayon a et de masse volumique ρ dans l'air.
1 - Dans un premier temps, la sphère est suspendue à un point fixe O par un fil et se trouve placée dans une soufflerie. La vitesse du vent, horizontale, a pour valeur v_0 et le fil fait alors un angle α avec la verticale. La résistance de l'air s'exprime par une force de norme $f = k\,\pi\,a^2\,v_0^2$ où v_0 est la vitesse du vent : en déduire la valeur numérique du coefficient k dans le système S.I.
2 - Cette sphère est maintenant lâchée dans l'air immobile, hors de la soufflerie, sans vitesse initiale. La norme de la force de frottement s'écrit alors $f = k\,\pi\,a^2\,v^2$ où v est la vitesse de l'objet et avec le même coefficient k qu'à la question précédente. ↱ question 1) sphère immobile, vent en mouvement ⇒ ~ changement de référentiel
2.(a) - Justifier la différence entre les expressions des forces de frottement fournies dans les deux situations.
2.(b) - Calculer la vitesse limite de la bille ; à quelle hauteur de chute dans le vide cette vitesse correspond-elle ?
$\frac{dv}{dt} = 0$ ⇒ $v_{lim} = 24$ m.s^{-1} $mgh = \frac{1}{2}mv_{lim}^2$ ⇒ $h = 30$ m
2.(c) - Pour une chute de deux mètres de haut, quelle fraction du poids la force de frottement représente-t-elle ?

Données : $a = 1{,}0\,\text{cm}$; $\rho = 11{,}3\,\text{g·cm}^{-3}$; $v_0 = 10\,\text{m·s}^{-1}$; $\alpha = 1{,}68\cdot10^{-1}\,\text{rad}$; $g = 9{,}8\,\text{m·s}^{-2}$.

[2] - (Niveau 2) :

On donne les valeurs numériques suivantes :

Constante de gravitation	masse de la Terre	masse du Soleil	distance Terre-Soleil	Rayon terrestre
$6,7.10^{-11}$ uSI	$6,0.10^{24}$ kg	$2,0.10^{30}$ kg	$1,5.10^{8}$ km	$6,4.10^{3}$km

1 - Un objet ponctuel, de masse m, situé en M, subit une unique force $\vec{f} = f(r)\vec{e}_r$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Montrer que sa trajectoire $(\mathcal{T})$ est incluse dans un plan et déterminer celui-ci. Montrer que cet objet respecte la loi des aires. ⇒ théorème du moment cinétique en O cf cours forces centrales

2 - Un satellite $(\mathcal{S}\dashv)$ est sur une orbite circulaire $(\mathcal{O})$ de rayon r_0 autour de la Terre à une altitude z_0. Démontrer qu'on peut négliger la force de gravitation du Soleil, et en déduire le référentiel galiléen adapté à cette étude.

3 - Déterminer, dans ce référentiel, l'expression de la vitesse v_0 du satellite, son énergie potentielle de gravitation et sa période de révolution autour de la Terre. mouvement circulaire : $\vec{v} = v\,\vec{u_\theta}$, $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_\theta} - \frac{v^2}{r_0}\vec{u_r}$

PFD : $v_0^2 = \frac{G m_T}{r_0}$

[3] - (Niveau 2) :

Un lance-balle automatique de base-ball lance des balles depuis une hauteur h avec un angle α réglable par rapport à l'horizontale (Ox), et une vitesse de norme v_0 fixe. On prendra l'axe Oz vers le haut.

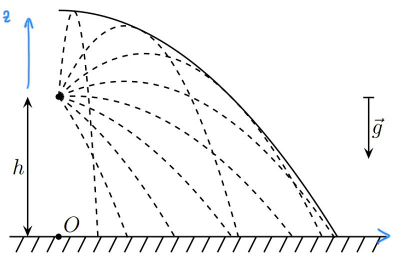
1 - Déterminer la trajectoire de l'objet. $\begin{cases}\ddot{x} = 0\\ \ddot{z} = -g\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x} = v_0\cos\alpha\\ \dot{z} = v_0\sin\alpha - gt\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = v_0\cos\alpha\, t\\ z = h + v_0\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}\end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$

$z = h + \tan\alpha\, x - \frac{g x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$

2 - En déduire l'expression de la cote du point le plus haut atteint, appelée *flèche* de la balle. h_{max} pour $\dot{z} = 0$, on trouve $h_{max} = h + \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$ avec 1) ou un bilan d'énergie méca.

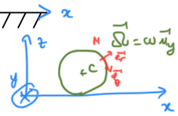
3 - On cherche à déterminer l'expression de la courbe séparant l'ensemble des points pouvant être atteints par la balle des points qu'elle ne peut atteindre, appelée *parabole de sûreté*. Pour cela, discuter de la condition à laquelle un point $M(x_0, z_0)$ peut être atteint par la balle. L'équation $z_0 = h + \tan\alpha\, x_0 - (1+\tan^2\alpha)\frac{g}{2v_0^2}x_0^2$ admet-elle des solutions ?

On pourra utiliser : $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ ⇒ On pose $X = \tan\alpha$, trinôme à résoudre avec $\Delta > 0$



[4] - (Niveau 2) :

Une roue de vélo de rayon R est posée sur le sol et roule sans glisser sur une route horizontale. Le moyeu avance à vitesse constante $\vec{v}$ par rapport au sol. On munit la roue d'une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.



$\vec{v_A} = \vec{v_C} + \vec{\Omega} \wedge \vec{CA}$
$= v\,\vec{e_x} + R\omega\,\vec{e_\theta}$

1 - Déterminer la vitesse d'un point A de la roue par rapport au sol (vectoriellement et en norme).

2 - Déterminer l'expression des coordonnées du point A en fonction du temps. Proposer les instructions en *Python* permettant d'afficher la courbe de la trajectoire. $\frac{dE_c}{dt} = \underbrace{-mg\sin\alpha\, v}_{\text{puissance poids}} \underbrace{-\frac{1}{2}C_x S\rho_a v^3}_{\text{puissance frottements}} + \mathcal{P} = 0$ si vitesse constante

3 - Quelle puissance doit développer un cycliste pour avancer à vitesse constante en montée, en prenant en compte la résistance de l'air $\frac{1}{2}\,C_x\,S\,\rho_a\,v^2$ où C_x est le coefficient de résistance aérodynamique (environ égal à 0,5 dans ces circonstances), ρ_a la masse volumique de l'air, S la section du cycliste et v sa vitesse ? Faire l'application numérique avec les ordres de grandeur que vous jugerez pertinents.

[5] - (Niveau 2) :

On suppose qu'un puits de forage rectiligne joint deux points distincts situés à la surface de la Terre. Ces deux points ne sont pas diamétralement opposés. On lâche dans ce puits un petit objet de masse m sans vitesse initiale. On suppose que la Terre est à répartition homogène de masse.

1 - L'objet tombe sans frottement. Où sa trajectoire l'emmène-t-elle ? En combien de temps ?

2 - Mêmes questions en introduisant des frottements, que l'on pourra supposer linéaires en vitesse.

3 - Que se passe-t-il si la Terre tourne sur elle-même ? (On discutera de ce qui se passe en fonction de la direction du puits de forage par rapport à la direction de l'axe de rotation.)

Théorème de Gauss gravitationnel : $\vec{\mathcal{G}} = -\frac{4\pi G}{3}\rho\, r\vec{u_r} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{\mathcal{G}} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u_r}$ avec $E_p = \frac{4\pi m G\rho}{6}r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ $= h^2 + x^2$

E_m = cte avec $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0$, $x(t) = x_0\cos(\omega t)$, il faut une demi-période $T = \frac{\pi}{\omega}$ pour traverser.