Révisions Oral - Physique quantique

Les bons réflexes :

- Déterminer le type d'exercice : étude d'un état lié, d'un état de diffusion, cas d'une particule seule, d'un flux de particules : il faut alors savoir utiliser le vecteur densité de courant de probabilité
$$\vec{J} = |\psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$
- Faire le lien entre les propriétés classiques (énergie mécanique) et les caractéristiques quantiques de la particule (vecteur d'onde).
- 1eV = énergie d'une charge e accélérée par une différence de potentiel de 1V : soit $1,6.10^{-19}$ J.
- Dans un gaz à la température T, la vitesse quadratique moyenne des particules v^2 est reliée à la température :
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B T$$
- Les inégalités d'Heisenberg :
$$\Delta E . \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$
$$\Delta p_x . \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$
permettent une analyse qualitative du problème.

Rq : il peut être utile d'écrire $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

valeur moyenne de x^2 ; (valeur moyenne de x)^2

Entrainement

pour une particule décrite par une OPPH, on obtient bien $E = \frac{(\hbar k)^2}{2m} + V_0$ avec $\hbar k = p$

Il faut connaître l'E.S. indépendante du temps : $-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V \varphi(x) = E \varphi(x)$

et l'écriture de $\Psi(x,t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$

↳ On peut retrouver l'E.S. : $-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x) + V \Psi(x) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$

1 - Écrire l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde $\Psi(x,t)$.

2 - On étudie un état stationnaire :
$$\Psi(x,t) = \varphi(x) \exp\left(-\frac{E\, t}{\hbar}\right)$$

Établir l'équation vérifiée par $\varphi(x)$ et indiquer les conditions aux limites vérifiées par $\varphi(x)$ suivant les cas. Pourquoi parle-t-on d'état stationnaire ? Une superposition d'états stationnaires est-elle un état stationnaire ? Donner un exemple.

↳ il y a 2 raisons : $|\Psi|^2$ indép du temps (principale raison) ; $\varphi(x) f(t)$ = onde stationnaire

↳ non : exemple $\Psi(x,t) = \varphi_1(x) e^{-i\omega_1 t} + \varphi_2(x) e^{-i\omega_2 t}$; $|\Psi|^2$ dépend de t si $\omega_1 \neq \omega_2$

3 - Établir rapidement les expressions des coefficients de transmission et de réflexion :
$$R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|} \; ; \; T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|}$$

dans le cas d'un flux de particule arrivant de $-\infty$ avec une énergie E sur une marche de potentiel telle que $V_o < E$.

⚠ à bien mettre m en kg dans $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B T$

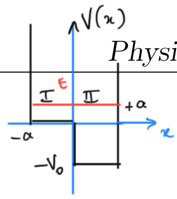
4 - Estimer la longueur d'onde de Broglie d'un électron dont l'énergie mécanique est égale à 1keV et d'un atome d'hélium dans un gaz à température ambiante.

→ puits ∞ de largeur $a \sim 10^{-10}$ m

5 - Estimer l'ordre de grandeur de l'énergie de confinement d'un électron dans un atome d'hydrogène.

6 - (**) Faire une présentation rapide de l'effet tunnel puis proposer un traitement plus précis en indiquant par exemple les étapes du calcul permettant d'établir l'expression du coefficient de transmission T. Citer 2 applications de l'effet tunnel.

7 - (**) On considère une particule quantique dans un puits de potentiel de profondeur finie. Déterminer l'énergie de l'état fondamental en utilisant une méthode graphique.



Zone I : $\varphi_I''(x) + k_1^2\, \varphi_I(x) = 0$ $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $k_2^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$ $k_2^2 - k_1^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$

Zone II : $\varphi_{II}''(x) + k_2^2\, \varphi_{II}(x) = 0$

$\varphi_I(x) = A \sin(k_1(x+a)) \rightarrow$ s'annule en $x = -a$

$\varphi_{II}(x) = B \sin(k_2(x-a)) \rightarrow$ s'annule en $x = +a$

On écrit ensuite la continuité de φ et φ' en 0
$\Rightarrow$ équation liant k_1 et k_2

Des exercices pour s'entrainer

1 Physique quantique

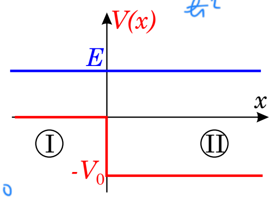
On considère un quanton (particule quantique, de masse m et d'énergie E) prisonnier d'un puits de potentiel. On prend $V(x) \to +\infty$ pour $x < -a$ et $x > a$. Pour x entre $-a$ et 0, le potentiel $V(x)$ est nul Pour x entre 0 et a , le potentiel est négatif et on a $V(x) = -V_0$.

Déterminer le premier niveau d'énergie positive du quanton pour avoir un état stationnaire.

Indications : il faut trouver une matrice reliant les constantes d'intégration entre elles, puis utiliser la condition sur cette matrice pour que la solution du système d'équations ne soit pas identiquement nulle.

2 Physique quantique

$\rightarrow k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $k_2^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$



On étudie le mouvement d'un quanton de masse m et d'énergie $E > 0$, qui, venant de $x = -\infty$, rencontre en $x = 0$ une marche de potentiel de la forme ci-contre (avec $V_0 > 0$). On note φ la fonction d'onde spatiale associée. $\varphi_I(x) = A\, e^{ik_1 x} + r A\, e^{-ik_1 x}$

1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par φ. $\varphi_{II}(x) = tA\, e^{ik_2 x}$

2 - Donner les expressions de φ dans les milieux I et II.

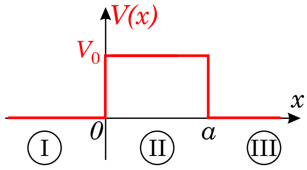
3 - Déterminer r et t, coefficients de réflexion (resp. transmission) associés à l'amplitude de la fonction d'onde réfléchie (resp. transmise). $\rightarrow$ continuité de φ et φ' en $x = 0$

4 - En déduire une expression de R et T, coefficients de réflexion de de transmission en terme de courant de probabilité. Commenter. Application numérique pour $V_0 = 8\,E$. $R = \frac{1}{4}$, $T = \frac{3}{4}$

$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$ $T = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$

3 Physique quantique

On s'intéresse au fonctionnement d'une pointe de microscope à effet tunnel : la pointe du microscope est située à une distance a d'un échantillon. Cette pointe est parcourue par un courant d'intensité I : arrivés à son extrémité, les électrons doivent franchir l'espace vide entre la pointe et l'échantillon, métallique lui aussi. On modélise donc ce phénomène en considérant un faisceau d'électrons, dont la masse est notée m, arrivant de $x = -\infty$ avec une énergie E sur une barrière de potentiel de hauteur V_0.



1 - Dans le cas classique, qu'arrive-t-il a la particule incidente ?

2 - En physique quantique les choses sont bien différentes. Donner les équations de Schrödinger indépendantes du temps vérifiées par la fonction d'onde dans les trois domaines de l'espace. Expliquer qualitativement ce que l'on va observer, selon que $E > V_0$ ou $E < V_0$. Dans quel cas parle-t-on d'effet tunnel ?

On donne l'expression du coefficient de transmission en densité de courant de probabilité :

$T = \frac{\|J_t\|}{\|J_i\|}$ avec $J = |\varphi|^2 \frac{\hbar k}{m}$

$$T = \frac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4\,E\,(V_0 - E)}\,\mathrm{sh}^2(a/\delta)}$$

où $\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2\,m\,(V_0 - E)}}$. $\hookrightarrow$ épaisseur sur laquelle $|\varphi|^2$ n'est pas négligeable même si $E < V$

3 - Que représente δ ? Rappeler la définition exacte du coefficient T. Qu'obtient-on dans le cas où $a >$qquesδ ?

4 - On obtient, pour les électrons d'un STM (Scanning Tunnelling Microscope) : $\delta \simeq 40\,\mathrm{pm}$. En prenant $E \simeq V_0/2$ et $a \simeq 300\,\mathrm{pm}$, estimer l'ordre de grandeur du coefficient T. On mesure un courant tunnel de l'ordre du nano-Ampère. Peut-on envisager une telle mesure à l'aide des instrements classiquement utilisés en TP de physique ?

$\hookrightarrow$ limitation liée à la diffraction $\Rightarrow$ résolution des instruments d'optique de l'ordre de $\lambda_{visible}$ (~ 500 nm)

Rappel : approximation de la barrière épaisse : $a > \delta$ $\Rightarrow \mathrm{sh}^2\left(\frac{a}{\delta}\right) \sim \frac{e^{2a/\delta}}{4}$ avec $e^{2a/\delta} >> 1$

$$\Rightarrow T \simeq \frac{1}{\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}\,\frac{e^{2a/\delta}}{4}} = \underbrace{\frac{16\,E\,(V_0 - E)}{V_0^2}}_{\text{compris entre 0 et 4}}\, e^{-2a/\delta}$$

résultat qu'on peut retenir