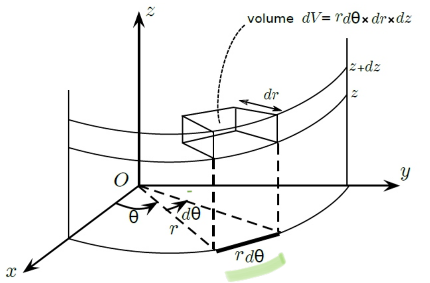
Les coordonnées sphériques et cylindriques

1. **Coordonnées cylindriques :**



$r \in [0, +\infty[$
$\theta \in [0, 2\pi[$
$z \in]-\infty, +\infty[$
trièdre direct $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

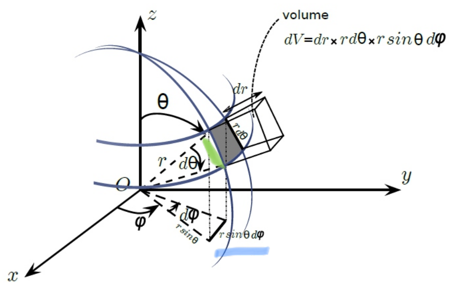
Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r\ + z\,\vec{u}_z$$

Le vecteur déplacement élémentaire (déplacement du point M lorsque ses coordonnées varient de dr, $d\theta$ et dz) s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r\ + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta\ + dz\vec{u}_z$$

2. **Coordonnées sphériques :**



$r \in [0, +\infty[$
$\theta \in [0, \pi]$
$\varphi \in [0, 2\pi[$
Trièdre direct : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

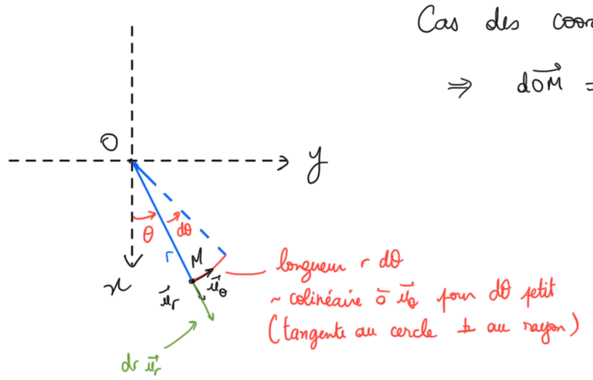
Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$

Le vecteur déplacement élémentaire (déplacement du point M lorsque ses coordonnées varient de dr, $d\theta$ et $d\varphi$) s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r\ + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta\ + r\,sin(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

Justifier les expressions des déplacements élémentaires en coordonnées cylindriques et sphériques. On rappelle que la longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle α est $R\,\alpha$.



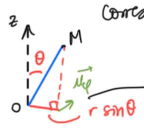
Cas des coordonnées planes (problème à 2 dimensions)

$\Rightarrow d\vec{OM} = \underbrace{dr\,\vec{u}_r}\ + \underbrace{r\,d\theta\,\vec{u}_\theta}$ déplacement du point M lorsque θ varie de dθ

déplacement du point M lorsque r varie de dr

→ En coordonnées cylindriques, on ajoute juste $dz\,\vec{u}_z$ déplacement de M lorsque z varie de dz.

→ En coordonnées sphériques, c'est la variable φ qui correspond au déplacement dans le plan (Oxy)



→ rayon du cercle ⇒ $\underbrace{r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi}$ déplacement de M lorsque φ varie de dφ

Calculer la charge totale d'une distribution

On considère une sphère de rayon R dans laquelle la densité volumique de charge $\rho(M) = \rho(r)$.

1. Écrire le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques. En déduire l'expression du volume élémentaire $d\tau$ en coordonnées sphériques.
2. La charge dq contenue dans $d\tau$ est :

$$dq = \rho(r)\ d\tau$$

   En déduire l'expression de la charge Q contenue dans la sphère. Déterminer les valeurs des intégrales sur θ et φ.
3. Que vaut Q pour $\rho(r) = \rho_o$ uniforme ? Vérifier la cohérence du résultat.

1) $d\vec{OM} = dr\ \vec{u_r} + r\,d\theta\ \vec{u_\theta} + r\sin\theta\ d\varphi\ \vec{u_\varphi} \Rightarrow d\tau = r^2\,dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

2) $$Q = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho(r)\, r^2\,dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta}_{2}\ \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\ \int_0^R \rho(r)\,r^2\,dr$$

$$Q = 4\pi\int_0^R \rho(r)\,r^2\,dr$$

3) Pour $\rho(r) = \rho_0$, on obtient :

$$Q = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{\text{volume de la sphère de rayon } R}\ \rho_0$$

Définition du gradient

On définit le gradient d'une fonction scalaire $f(M)$ par la relation :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f).d\overrightarrow{OM}$$

df = différentielle de f

En coordonnées cartésiennes, f est une fonction de x, y, z et df représente la variation de la fonction $f(x, y, z)$ lorsque x, y et z varient respectivement de dx, dy, dz. On peut donc également écrire :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\ dx\ +\ \frac{\partial f}{\partial y}\ dy\ +\ \frac{\partial f}{\partial z}\ dz$$

En utilisant l'expression du déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cartésiennes, on en déduit l'expression du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\ \vec{u}_x\ +\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \vec{u}_y\ +\ \frac{\partial f}{\partial z}\ \vec{u}_z$$

Établir les expressions du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\ \vec{u}_r\ +\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\ \vec{u}_\theta\ +\ \frac{\partial f}{\partial z}\ \vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\ \vec{u}_r\ +\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\ \vec{u}_\theta\ +\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\ \vec{u}_\varphi$$

En coordonnées cylindriques : f fonction de $r, \theta, z \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial r}\,dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$

$\overrightarrow{\text{grad}}\,f = G_r\,\vec{u_r} + G_\theta\,\vec{u_\theta} + G_z\,\vec{u_z} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\,f \,.\, d\vec{OM} = G_r\,dr + G_\theta\,r\,d\theta + G_z\,dz$

On identifie ensuite $\begin{cases} G_r = \frac{\partial f}{\partial r} \\ rG_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ G_z = \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$ (unicité de l'écriture de la différentielle)

Utilisation du gradient : forces conservatives

En mécanique, on a défini une force conservative comme une force dont le travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi :

$$W_{AB}(\vec{F}) = -(E_p(B) - E_p(A))$$

$E_p(M)$ désignant l'énergie potentielle au point M.
L'opérateur **gradient** permet de relier le champ de vecteurs $\vec{F}$ à la fonction $E_p(M)$:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

1. Montrer que :
$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \Rightarrow W_{AB}(\vec{F}) = -(E_p(B) - E_p(A))$$
En pratique $\vec{F}$ conservative $\Leftrightarrow$ il existe E_p telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$.
2. On se place en coordonnées cartésiennes, l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur à l'aide de la relation :
$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$
3. En utilisant les coordonnées sphériques, déterminer l'énergie potentielle associée à la force électrostatique exercée par une charge q_o placée en O sur une charge q placée en M :
$$\vec{F} = \frac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{u}_r$$
4. En coordonnées cylindriques : la force ci-dessous, appelée force d'inertie d'entrainement ou force centrifuge est-elle conservative ?
$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r\vec{u}_r$$

1) $\left.\begin{aligned} \delta W &= \vec{F}\cdot d\vec{OM} \\ \vec{F} &= -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta W = -dE_p$ soit $W_{AB} = \int_A^B -dE_p$

$\Rightarrow W_{AB} = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right)$

2) z $\downarrow \vec{g}$ On cherche E_p telle que $\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$

$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} = 0 \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} = -mg \end{cases}$ E_p ne dépend pas des variables x et y

$\Rightarrow \dfrac{dE_p}{dz} = mg$ soit $E_p = mgz + E_{po}$ constante d'intégration

3) On cherche E_p telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$, on a : $-\dfrac{dE_p}{dr} = \dfrac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$

$\Rightarrow E_p = \dfrac{q_o q}{4\pi\varepsilon_o r} + E_{po}$

On choisit en général $E_{po} = 0$ pour avoir $E_p \to 0$ lorsque q_o et q sont à l'infini l'une de l'autre.

4) De même : $-\dfrac{dE_p}{dr} = m\omega^2 r$

$\Rightarrow E_p = -\dfrac{1}{2}m\omega^2 r^2 + E_{po}$

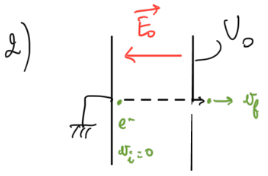
Potentiel électrostatique : applications

1. Déterminer l'expression du potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q_o placée en O en tout point M de l'espace.
2. Déterminer la vitesse d'un électron de masse $m \simeq 10^{-30}$ kg accéléré par une différence de potentiel $U = 10^2$ V.

1) Le champ $\vec{E}$ créé par la charge q_o s'écrit : $\vec{E} = \dfrac{q_o}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{u_r}$ (coordonnées sphériques)

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V \Rightarrow -\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{q_o}{4\pi\varepsilon_o r^2}$ soit $V = \dfrac{q_o}{4\pi\varepsilon_o r}$ $(+V_o)$ choisi nul en général

2)



Bilan d'énergie mécanique :

* état initial | $V = 0 \Rightarrow E_{p_i} = -eV = 0$
  vitesse $v_i = 0 \Rightarrow E_{c_i} = 0$
* état final | $V = U_o \Rightarrow E_{pf} = -eU_o$
  vitesse $v_f \Rightarrow E_{cf} = \dfrac{1}{2} m v_f^2$

Conservation de l'énergie mécanique (force conservative) :

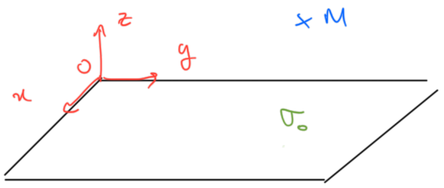
$$0 = -eU_o + \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2eU_o}{m}}$$

A.N : $m \simeq 10^{-30}$ kg $\quad e = 1{,}6.10^{-19}$ C $\Rightarrow v_f \simeq 5.10^6$ m.s^{-1}

Invariances et symétrie

On considère un plan infini (Oxy) portant la densité surfacique de charges uniforme σ_o. Montrer que le champ en un point M de l'espace n'appartenant pas au plan s'écrit :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$$



Symétries : les plans $(M, \vec{u_x}, \vec{u_z})$ et $(M, \vec{u_y}, \vec{u_z})$

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\,\vec{u_z}$

Invariances : la distribution de charges est invariante par translation suivant $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$

$\Rightarrow E(M) = E(\cancel{x}, \cancel{y}, z)$

Finalement : $\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{u_z}$

Calculer un rotationnel

On définit l'opérateur linaire **rotationnel** qui transforme un champ de vecteurs $\vec{E}$ en un champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})$ dont l'expression en coordonnées cartésiennes est :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

Calculer le rotationnel du champ de vecteurs définit par :

$$\vec{E} = 2V_o\ y\ \vec{u}_x + 3V_o \frac{x\ y}{a}\ \vec{u}_y$$

$\vec{E}$ peut-il correspondre à un champ électrostatique ?

$\hookrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ldots}{\partial x} \\ \frac{\partial \ldots}{\partial y} \\ \frac{\partial \ldots}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2V_0\, y \\ 3V_0 \frac{x.y}{a} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3V_0\, y}{a} - 2V_0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} \neq \vec{0}$, $\vec{E}$ ne peut pas correspondre à un champ électrostatique

Calculer une divergence

On définit l'opérateur linéaire **divergence** qui transforme un champ de vecteurs $\vec{E}$ en un champ scalaire $\text{div}(\vec{E})$ qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Calculer la divergence du champ de vecteurs définit par :

$$\vec{E} = 2V_o\ y\ \vec{u}_x + 3V_o \frac{x\ y}{a}\ \vec{u}_y$$

$\vec{E}$ peut-il correspondre à un champ électrostatique ?

$\text{div}\,\vec{E} = 0 + 3V_0 \frac{x}{a}$ (la réponse est toujours non car $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} \neq \vec{0}$)

Dimension de ε_o

Déterminer la dimension de ε_o à l'aide du théorème de Gauss puis à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss.

* Théorème de Gauss : $\oiint \vec{E}.\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow [E].\text{surface} = \frac{[Q]}{[\varepsilon_0]}$

Avec les unités : $[\varepsilon_0] = \frac{C}{V.m^{-1}.m^2} = F.m^{-1}$ $(q = C\,U)$ F, C, V

* Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{[E]}{\text{longueur}} = \frac{[Q]}{\text{volume}.[\varepsilon_0]}$

dérivée simple de $\vec{E}$ par rapport à $x, y \ldots$

Du théorème de Gauss à la loi de Coulomb

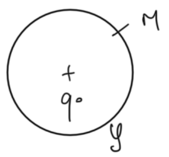
Historiquement, l'équation de Maxwell Gauss est arrivée après la loi de Coulomb. Grâce au cours de cette année, la connaissance des équations de Maxwell et du théorème de Gauss vous permettra de retrouver la loi de Coulomb si vous l'avez oubliée.
On considère ici une charge ponctuelle q_o placée en O.

1. Montrer que le champ électrique créé par cette charge en un point M s'écrit :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

2. Déduire la loi de Coulomb donnant l'expression du champ électrique créé par q_o au point M du théorème de Gauss.

1)



Symétries : tous les plans contenant (OM) sont des plans de symétrie
$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\vec{u_r}$

Invariances : la distribution est invariante par toute rotation de centre O $\Rightarrow E(M) = E(r)$

Finalement : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u_r}$

2) $\mathcal{S}$ = sphère de centre O passant par M : $\oint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \iint_{sphère} E(r)\, dS = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$

surface d'une sphère de rayon r : $4\pi r^2$

$\Rightarrow E(r) = \frac{q_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

Calculer un Laplacien

On définit l'opérateur linéaire **Laplacien** qui agit sur un champ scalaire $V(M)$ pour le transformer en un champ scalaire ΔV qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Propriété :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = \Delta V$$

Montrer qu'en électrostatique :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

Démo de la propriété : on se place en coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$

$\Rightarrow \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, V) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$

$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

* En électrostatique : $\left.\begin{array}{l}\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \\ \text{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{array}\right\}$ $\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}\, V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

soit $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Résolution numérique de l'équation de Poisson

On se place dans le cas où le potentiel V est une fonction de x uniquement. On souhaite faire une résolution numérique de l'équation de Poisson sur une zone de longueur L en prenant N valeurs. On note $a = L/(N-1)$ le pas de discrétisation. On écrit les développements de Taylor à l'ordre 2 de la fonction $V(x)$ en $x \pm a$:

$$V(x+a) \simeq V(x) + aV'(x) + \frac{a^2}{2}V''(x)$$

$$V(x-a) \simeq V(x) - aV'(x) + \frac{a^2}{2}V''(x)$$

Soit :

$$V(x+a) + V(x-a) = 2V(x) + a^2V''(x)$$

En notant $x_i = i.a$, on a alors :

$$a^2\ V''(x_i) = V(x_{i+1}) + V(x_{i-1}) - 2V(x_i)$$

L'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

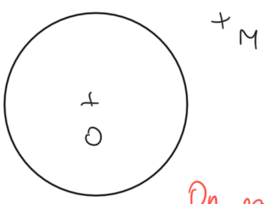
permet alors de déterminer $V(x_{i+1})$ en fonction de $V(x_{i-1})$, $V(x_i)$ et $\rho(x_i)$.
Reprendre le raisonnement précédent pour $V(x,y)$.

idée : $V(x, y+a) \simeq V(x,y) + a\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$

$$\Rightarrow \quad a^2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)}_{\Delta V \text{ en } x_i, y_j} = V(x_{i+1}, y_j) + V(x_{i-1}, y_j) + V(x_i, y_{j+1}) + V(x_i, y_{j-1}) - 4V(x_i, y_j)$$

Théorème de Gauss pour la gravitation

On assimile une planète à une sphère dont la masse volumique ρ ne dépend que de la variable r en coordonnées sphériques. Montrer que le champ de gravitation en un point M de l'espace est porté par $\vec{u}_r$ et déterminer son expression pour un point à l'extérieur de la planète.



On parle de symétrie sphérique

Symétrie : tous les plans contenant (OM) sont des plans de symétrie
$\Rightarrow \vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(M)\,\vec{u_r}$

Invariances : la distribution est invariante par toute rotation de centre O
$\Rightarrow \mathcal{G}(M) = \mathcal{G}(r)$

Finalement $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r)\,\vec{u_r}$

Théorème de Gauss pour la gravitation (analogie à justifier comme dans le cours)

$$\Rightarrow \oiint_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{dS} = -4\pi G M_{int}$$

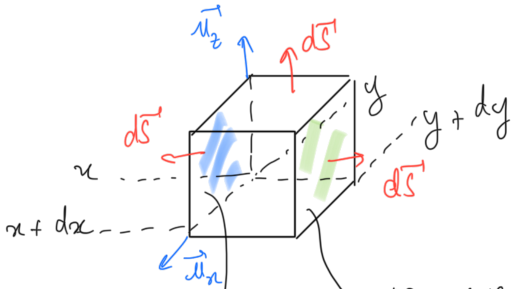
$\mathcal{S}$ = sphère de centre O passant par M à l'extérieur de la planète :

on note m_p la masse de la planète

$$4\pi r^2\, \mathcal{G}(r) = -4\pi G m_p \Rightarrow \vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{G m_p}{r^2}\,\vec{u_r}$$

Théorème de Green Ostrogradski

On considère un élément de volume compris entre x et $x+dx$, y et $y+dy$, z et $z+dz$.
Retrouver l'expression de la divergence de $\vec{E}$ en appliquant le théorème de Green Ostrogradski à ce système.
Comment modifier le raisonnement pour trouver l'expression de $\text{div}(\vec{E})$ en coordonnées cylindriques ?
Comment modifier le raisonnement pour trouver l'expression de $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})$ en coordonnées cartésiennes ?



On calcule le flux de $\vec{E}$ à travers $\mathcal{S}$:

$$\phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\vec{dS}$$

par exemple pour cette face située en $y+dy$

$$\vec{dS} = dz\,.\,dx\,\vec{u_y} \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{dS} = E_y(x, y+dy, z)\,dz\,dx$$

pour celle-là $\vec{dS} = -dz\,dx\,\vec{u_y} \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{dS} = -E_y(x,y,z)\,dz\,dx$

$\Rightarrow$ la somme des 2 donne $\underbrace{\left(E_y(x,y+dy,z) - E_y(x,y,z)\right)}_{\frac{\partial E_y}{\partial y}dy}dz\,.\,dx$

En raisonnant de la même façon pour les autres faces, on obtient :

$$\phi = \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{\text{div}\,\vec{E}} \underbrace{dx\,dy\,dz}_{\text{volume dans } \mathcal{S}}$$

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div}\,\vec{E}\,d\tau$$

Green_Ostrogradski