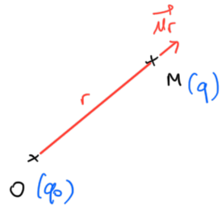
Électromagnétisme
Chapitre 1 - Électrostatique

Contexte

— Charges ponctuelles :

* électrons de charge $-e$
* ions : cations de charge $+ne$ ex Cu^{2+} ion cuivre II
  anions de charge $-ne$ ex Cl^{-} ion chlorure

— **Force de Coulomb** (*introduite expérimentalement en 1784*) : la force exercée par la charge ponctuelle q_o placée en O sur la charge q placée en M s'écrit :



$$\vec{F} = \frac{q_o\ q}{4\pi\varepsilon_o\ r^2}\vec{u}_r$$

$\varepsilon_o = 8,85.10^{-12}$ F.m^{-1} : **permittivité du vide**

$q_0 q > 0 \Rightarrow$ attractive
$q_0 q < 0 \Rightarrow$ répulsive

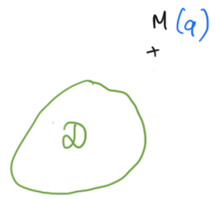
Dans le cadre de l'**électrostatique**, les charges sont **fixes**.

I. Loi de Coulomb

Idée : on peut considérer qu'un point matériel de masse m est soumis à son poids $\vec{P}$ ou bien qu'il évolue dans le champ de gravitation $\vec{g}$ créé par la Terre.

1. Champ électrostatique $\vec{E}$

On appelle distribution de charges $\mathcal{D}$ un ensemble de charges ponctuelles situées dans une zone de l'espace. On définit le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par $\mathcal{D}$ en un point M de l'espace par son action sur une charge ponctuelle q placée en M :



$$\vec{F} = q\ \vec{E}(M)$$

Exemple : soit une charge ponctuelle q_o placée en O, la force subie par une charge q en M

$$\vec{F} = \frac{q_o\ q}{4\pi\varepsilon_o\ r^2}\vec{u}_r$$

Le champ électrostatique créé par la charge ponctuelle q_o placée au point O s'écrit donc :

$$\vec{E} = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o\ r^2}\vec{u}_r$$

Commentaires :

— En 1ère année, vous avez introduit la **force de Lorentz** subie par une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$$

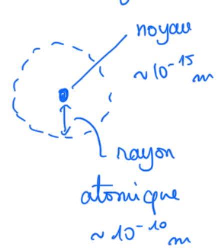
Dans le cas $\vec{v} = \vec{0}$ (charge fixe), on retrouve bien $\vec{F} = q\vec{E}$.

— Ordre de grandeur du champ atomique :

$$E_{at} \sim \frac{10^{-19}}{10 \cdot 10^{-11}(10^{-10})^2} \sim 10^{11}\ \text{V.m}^{-1}$$

l'unité de E sera justifiée plus loin

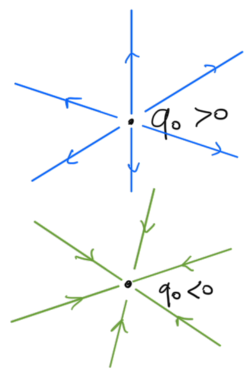
Ordre de grandeur



— $\vec{E}(M)$ est un champ de vecteurs : on peut associer un vecteur $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace (sauf cas particuliers : présence d'une charge ponctuelle par exemple).

On peut représenter un champ de vecteurs en traçant des lignes de champ : ce sont des courbes orientées telles que $\vec{E}(M)$ est tangent à la ligne de champ en M.

Les lignes de champs divergent à partir des charges positives et convergent vers les charges négatives.



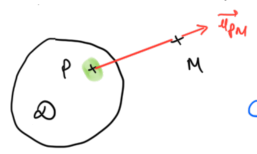
Théorème de superposition (linéarité des équations en électromagnétisme)

champ créé en M par un ensemble de charges ponctuelles $\{q_i\}$

$$\vec{E}(M) = \sum_i \underbrace{\vec{E}_i(M)}$$

champ créé par la charge q_i en M

Distribution volumique



$$\underset{C}{dq} = \underset{C.m^{-3}}{\rho(P)}\ \underset{m^3}{d\tau}$$

densité volumique de charges

$$\vec{E}(M) = \iiint_{P\in\mathcal{D}} \left(\frac{\rho(P)\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0\, PM^2}\, \vec{u}_{PM} \right)$$

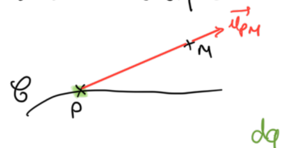
Distribution surfacique

$$\underset{C}{dq} = \underset{C.m^{-2}}{\sigma(P)}\ \underset{m^2}{dS}$$

densité surfacique de charges

$$\vec{E}(M) = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\sigma(P)\, dS}{4\pi\varepsilon_0\, PM^2}\, \vec{u}_{PM} \right)$$

Distribution linéique



$$\underset{C}{dq} = \underset{C.m^{-1}}{\lambda(P)}\ \underset{m}{d\ell}$$

densité linéique de charges

$$\vec{E}(M) = \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\lambda(P)\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0\, PM^2}\, \vec{u}_{PM} \right)$$

→ Ces formules sont obtenues en assimilant les éléments dq à des charges ponctuelles placées en P créant en M le champ :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\, PM^2}\, \vec{u}_{PM}$$

2. Potentiel électrostatique [1]

Point de vue électrostatique :

On définit le potentiel électrostatique $V(M)$ en un point M de l'espace par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

Cette relation fait intervenir l'opérateur linéaire **gradient** qui transforme le champ scalaire $V(M)$ en un champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}(V)$. **Attention !** Elle n'est plus valable dans le cas où les charges sont en mouvement.

Par définition du gradient :

$$dV = \overrightarrow{\text{grad}}(V).d\vec{\ell} \;\Rightarrow\; \vec{E}.d\vec{\ell} = -dV$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] = \frac{[V]}{[x]}$$

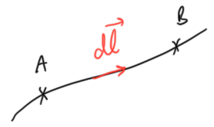
s'exprime en Volt

longueur

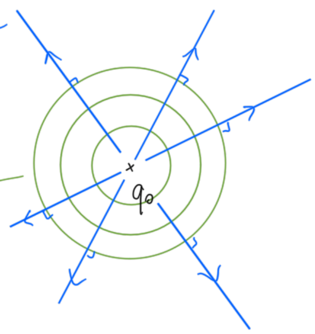
↳ $\vec{E}$ en $V.m^{-1}$

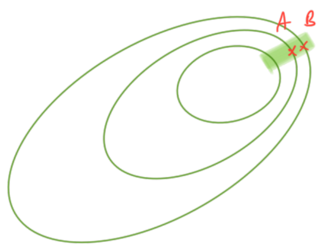
On a ainsi :

$$\boxed{\underbrace{\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell}}_{\text{circulation de } \vec{E} \text{ entre A et B}} = \underbrace{V_A - V_B}_{\text{tension } u_{AB}}}$$



On associe au potentiel électrostatique $V(M)$ des surfaces appelées **surfaces équipotentielles**. Les lignes de champ du champ électrostatique $\vec{E}$ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et dirigées dans le sens des potentiels décroissants.





← équipotentielles serrées ⇒ $\vec{E}$ plus intense

$$\vec{E}.\overrightarrow{AB} \simeq V_A - V_B$$

$$\Rightarrow \quad E \sim \frac{u_{AB}}{AB} \nearrow \text{ si } AB \searrow$$

1. Voir les encadrés sur la définition d'une force conservative à l'aide du gradient.

Point de vue mécanique

Une particule M de charge q dans le champ $\vec{E}$ créé par la charge q_o en O subit la force :

$$\vec{F} = \frac{q_o\, q}{4\pi\varepsilon_o\, r^2}\vec{u}_r$$

On remarque que :

$$\vec{F} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{q_o\, q}{4\pi\varepsilon_o\, r}\right)\vec{u}_r$$

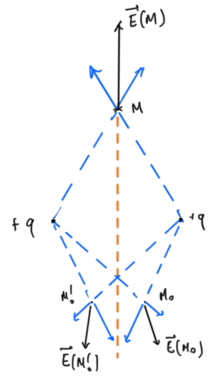
On introduit le **potentiel électrostatique** $V(M)$ tel que l'énergie potentielle associée à la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$ s'écrit $E_p = qV(M)$.
Le potentiel électrostatique créé par une charge q_o placée en O s'écrit alors :

$$V(M) = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o\, r}$$

$V(M) = \text{constante}$
$\Leftrightarrow$ $OM = \text{constante}$
$\Rightarrow$ les surfaces équipotentielles sont des sphères de centre O.

II. Propriétés du champ électrostatique

Formulé à la fin du XIXe siècle par Pierre Curie, le principe de Curie postule que « lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits ». Lorsqu'on cherche le champ électrostatique créé en un point M par une distribution de charges, on commence toujours par analyser les **symétries** et **invariances** de la distribution.



1. Propriétés d'invariance et de symétrie

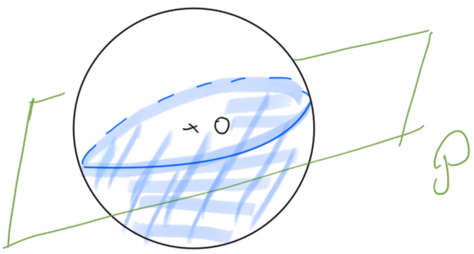
Plans de symétrie : *on considère tout d'abord le cas de deux charges ponctuelles identiques $+q, +q$*

Soit $\mathcal{P}$ un plan de symétrie de la distribution de charges :

- Si $M \in \mathcal{P}$ alors $\vec{E}(M) \in \mathcal{P}$
- Si $M'_o = sym_{\mathcal{P}}(M_o)$ alors $\vec{E}(M'_o) = sym_{\mathcal{P}}(\vec{E}(M_o))$

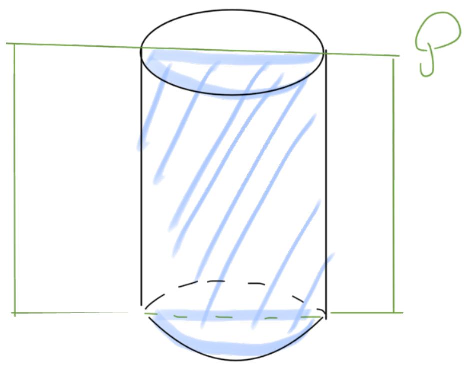
On dit que $\vec{E}$ est un vrai vecteur ou vecteur polaire

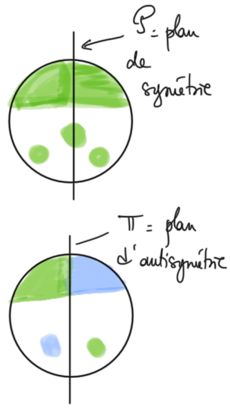
$\mathcal{D}$ = sphère uniformément chargée



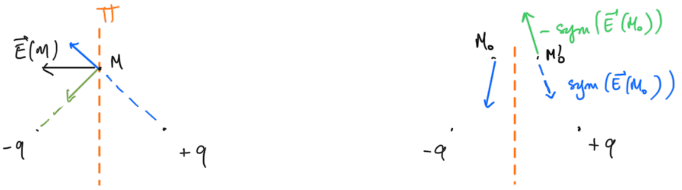
$\Rightarrow$ tout plan $\mathcal{P}$ passant par le centre O de la sphère est un plan de symétrie

$\mathcal{D}$ = cylindre uniformément chargé





Plans d'antisymétrie : *on considère tout d'abord le cas de deux charges ponctuelles opposées +q,-q*



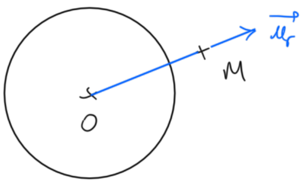
Soit Π un plan d'antisymétrie de la distribution de charges :

- Si $M \in \Pi$, $\vec E(M) \perp \Pi$
- Si $M_0' = sym_\Pi(M_0)$ alors $\vec E(M_0') = -sym_\Pi(\vec E(M_0))$

$\Rightarrow$ Pour avoir un plan d'antisymétrie, $\mathcal{D}$ doit comporter des charges positives et des charges négatives avec $Q_{tot} = 0$

Invariances :

$\mathcal{D}$ = boule de centre O uniformément chargée



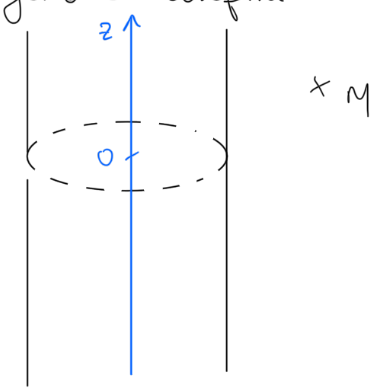
Symétries : tous les plans contenant la droite (OM) sont des plans de symétrie $\Rightarrow \vec E(M) = E(M)\,\vec u_r$

Invariances : la distribution est invariante par toute rotation de centre O : $E(M) = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})$

$\Rightarrow E(M) = E(r)$

Finalement $\vec E(M) = E(r)\,\vec u_r$ (coordonnées sphériques)

$\mathcal{D}$ = cylindre infini uniformément chargé



Symétries : les plans $(M, \vec u_r, \vec u_\theta)$ et $(M, \vec u_r, \vec u_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution

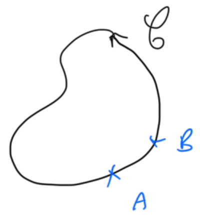
$\Rightarrow \vec E(M) = E(M)\,\vec u_r$

Invariance : la distribution est invariante par rotation d'axe (Oz) et par translation suivant $\vec u_z$

$\Rightarrow E(M) = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{z}) \Rightarrow E(M) = E(r)$

Finalement $\vec E(M) = E(r)\,\vec u_r$ (Coordonnées cylindriques)

2. Circulation du champ électrostatique $\vec{E}$



Soit $\mathcal{C}$ un contour fermé orienté :

$$\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell} = V_A - V_B$$

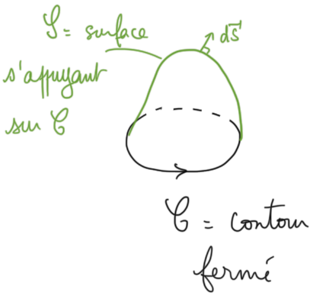
on ajoute un "o" sur l'intégrale

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}.d\vec{\ell} = 0$$

(loi des mailles)

Le champ électro**statique** $\vec{E}$ est à circulation conservative.

Théorème de Stokes :



$$\underbrace{\oint_{\mathscr{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}_{\text{circulation de } \vec{E} \text{ sur } \mathscr{C}} = \underbrace{\iint_{\mathscr{S}} (\overrightarrow{rot}\,\vec{E})\cdot d\vec{S}}_{\text{flux du rotationnel de } \vec{E} \text{ à travers } \mathscr{S}}$$

Rq : . $\vec{E}$ doit être dérivable pour que $\overrightarrow{rot}\,\vec{E}$ soit défini

. le vecteur $d\vec{S}$ est perpendiculaire à $\mathscr{S}$ et orienté par la règle de la main droite

Dans le cas du champ électrostatique :

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{quel que soit } \mathscr{C}$$

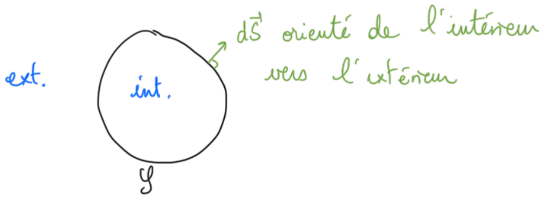
On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}}$$

Equation de MAXWELL – FARADAY

3. Flux du champ électrostatique $\vec{E}$

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée : → délimite un intérieur et un extérieur



$$\boxed{\oiint_{\mathscr{S}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

THEOREME DE GAUSS

"Le flux de $\vec{E}$ à travers la surface fermée $\mathscr{S}$ est égal à la charge Q_{int} à l'intérieur de $\mathscr{S}$ divisée par ε_0."

Théorème de Green-Ostrogradski

Soit $\mathscr{S}$ une surface fermée, $\mathscr{D}$ l'intérieur de $\mathscr{S}$:

$$\boxed{\oiint_{\mathscr{S}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathscr{D}} \text{div}\,\vec{E}\, d\tau}$$

$\text{div}\,\vec{E}$ = divergence de $\vec{E}$

Conséquence : en écrivant $Q_{int} = \iiint_{\mathscr{D}} \rho\, d\tau$ avec ρ : densité volumique de charges, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\iiint_{\mathscr{D}} \text{div}\,\vec{E}\, d\tau = \iiint_{\mathscr{D}} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau \Rightarrow \underbrace{\iiint_{\mathscr{D}} \left(\text{div}\,\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) d\tau = 0}$$

Ce résultat doit être valable quel que soit $\mathscr{D}$ ⇒ on a donc $\text{div}\,\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

En statique, le champ $\vec{E}$ et le potentiel V sont solutions des équations locales :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$ équation de Maxwell – Gauss

*

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$$ équation de Maxwell – Faraday

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow \text{div}(\vec{E}) = \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}\, V) = \Delta V$ laplacien de V

En coord. cartésiennes $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$ équation de Poisson

III. Compléments

1. Tracé de surfaces équipotentielles

— Tracé expérimental : à l'aide d'un voltmètre, on relève les points où le potentiel par rapport à une même référence (la masse de potentiel nul) est identique. *Le potentiel du cours d'électrostatique est le même que celui d'électrocinétique même si en régime variable on doit tenir compte des effets inductifs.*

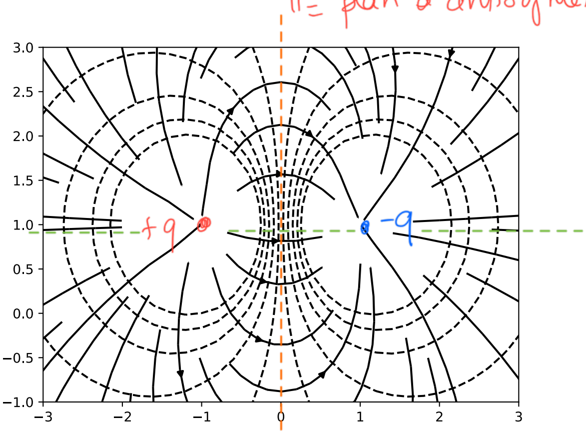
— Tracé numérique : on résout numériquement l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

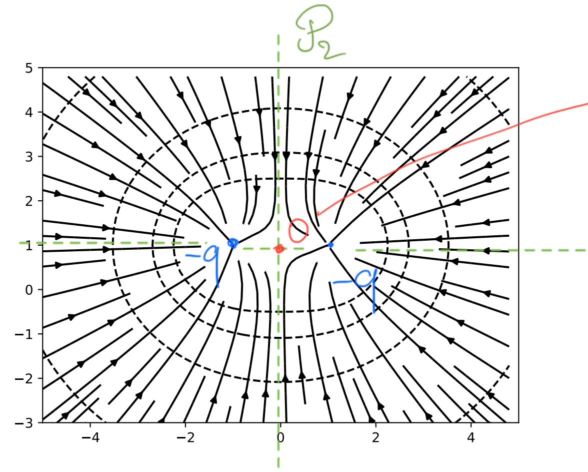
en tenant compte des conditions aux limites.

2. Analyse de cartes de champ

Π = plan d'antisymétrie



P plan de symétrie

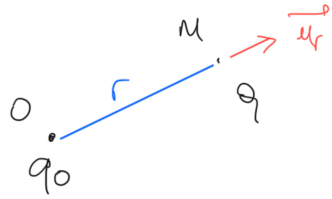


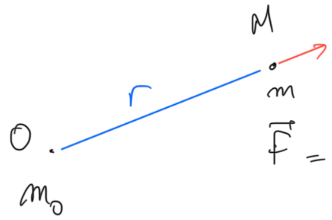
$\vec{E}(O) = \vec{0}$ (O appartient à 3 plans de symétrie)

3. Analogie avec le champ de gravitation

On observe une similitude entre la force de gravitation et la force de Coulomb.

$\vec{F} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$





$\vec{F} = -G\frac{m_0 m}{r^2}\vec{u_r}$

On construit l'analogie :

q	m
$\vec{E}$	$\vec{\mathcal{G}}$ tel que $\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}$
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-G$

On peut alors écrire un théorème de Gauss ou une équation de Maxwell-Gauss pour le champ de gravitation :

$$\iint \vec{\mathcal{G}}.d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$$

$$\mathrm{div}(\vec{\mathcal{G}}) = -4\pi G\rho(M)$$

$\rho(M)$ désigne alors la masse volumique au point M.

L'étude des invariances et symétries permettant de déterminer $\vec{\mathcal{G}}$ est analogue à celle permettant de déterminer $\vec{E}$ (mais il n'y a pas de masse négative).