Modèle de l'électron élastiquement lié

On utilise le modèle de Thomson de l'atome : on assimile un atome à une boule de rayon a de charge $+e$ uniformément répartie en volume dans laquelle se déplace un électron de charge $-e$. L'atome est ainsi globalement neutre. *Ce modèle a été mis en défaut par l'expérience de Rutherford qui a mis en évidence le fait que l'atome est globalement vide : le noyau portant la charge positive a une dimension de l'ordre 10^{-15}m très inférieure aux dimensions de l'atome (environ 10^{-10}m).*

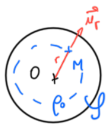
→ dans le cadre de ce modèle

On veut montrer que l'électron subit une force électrostatique qui s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = -kr\vec{u}_r$$

du type $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_r$ avec $\ell_0 = 0$

Déterminer l'expression de k en fonction des paramètres du système et de ε_o. Il faut pour cela exprimer le champ électrique à l'intérieur de la boule.



On pose $\rho_0 = \dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \dfrac{3e}{4\pi a^3}$ densité volumique de charge dans la boule

La distribution est à symétrie sphérique donc $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon $r < a$.

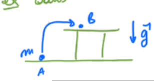
Théorème de Gauss : $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\dfrac{4}{3}\pi r^3$

$\Rightarrow E(r) = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r$ soit $E(r) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{a^3}$

Un électron en M subit la force $\vec{F} = -e\,\vec{E}(M)$

$\Rightarrow \vec{F} = \dfrac{-e^2}{4\pi a^3 \varepsilon_0} r\,\vec{u}_r \Rightarrow k = \dfrac{e^2}{4\pi a^3 \varepsilon_0}$

ex dans le cas du poids



Pour amener l'objet de masse m de A à B, l'opérateur exerce $\vec{F}_{op} = -\vec{P}$ (il déplace l'objet à vitesse nulle / il fait le moins d'effort possible). Le travail fourni par l'opérateur $W_{op} = -W(\vec{P}) = (E_p(B) - E_p(A)) = E_p(B)$ si A sert de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur.

Énergie potentielle d'un ensemble de charges ponctuelles

On considère un ensemble de charges ponctuelles $\{q_i\}$ placées aux points M_i.
On définit l'énergie potentielle de cette distribution comme étant le travail total fourni par un opérateur pour amener les charges $\{q_i\}$ depuis un état initial où elles sont à l'infini les unes des autres vers leurs positions finales respectives M_i.

1 - Quel est le travail à fournir pour amener la charge q_1 en M_1 (sachant que les autres charges sont infiniment loin) ?

2 - On amène ensuite la charge q_2 en M_2. Quel est l'énergie potentielle initiale de q_2 lorsqu'elle est à l'infini ? Quelle est sont énergie potentielle finale ? En déduire l'expression de la variation d'énergie potentielle lors de cette première étape.

3 - Reprendre le raisonnement pour la charge q_3 et en déduire l'expression de l'énergie potentielle de la distribution de charge. Vérifier que celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_o\ M_iM_j}$$

1) La charge q_1 est amenée de l'infini vers M_1, les deux zones sont vides de charge, on ne fournit aucun travail.

2) Initialement $\mathcal{E}_p = 0$ (q_2 est dans une zone vide de charge). Dans l'état final, q_2 est à proximité de la charge ponctuelle q_1 : $\mathcal{E}_p = q_2\,\underbrace{V_1(M_2)}$ potentiel créé par q_1 en M_2 $\Rightarrow \Delta\mathcal{E}_{p_2} = q_2\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 M_1M_2}$

3) Lorsque q_3 est amené de $+\infty$, q_1 et q_2 sont déjà présentes : $\Delta\mathcal{E}_{p_3} = q_3 V_1(M_3) + q_3 V_2(M_3)$
$= \dfrac{q_3\,q_1}{4\pi\varepsilon_0 M_1M_3} + \dfrac{q_3\,q_2}{4\pi\varepsilon_0 M_2M_3}$

L'énergie potentielle de la distribution $\{q_i\}$ est donc la somme des $\dfrac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon_0 M_iM_j}$ (en ne comptant qu'une fois chaque couple i,j)

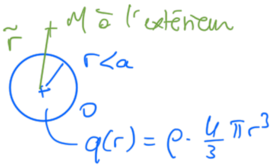
On préfère parfois écrire $\dfrac{1}{2}\sum_{i\neq j}\dfrac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon_0 M_iM_j}$ ⇒ les intéractions sont comptées 2 fois mais le $\frac{1}{2}$ vient corriger le problème.

Énergie potentielle d'une boule uniformément chargée

On reprend le raisonnement vu pour la distribution de charges ponctuelles $\{q_i\}$. On cherche cette fois le travail fourni par un opérateur pour amener des "couches de charges" depuis l'infini pour construire une boule de rayon a et de charge q uniformément répartie en volume. On note :

$$\rho = \frac{3q}{4\pi a^3}$$

1 - On considère une étape intermédiaire de la construction : la boule a un rayon $r < a$. Déterminer l'expression du champ $\vec{E}$ puis du potentiel $V(\tilde{r})$ créé par cette boule en un point tel que $\tilde{r} > r$. Vérifier que pour $\tilde{r} \to r$ on a :



$$V(r) = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon_o r} = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_o}$$

2 - On souhaite augmenter le volume de la boule de façon à faire passer son rayon de r à $r + dr$. À quel volume de matière de densité volumique de charge ρ cette variation correspond-elle ?

3 - En déduire que la variation d'énergie potentielle lors de cette étape est :

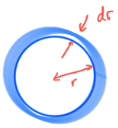
$$dE_p = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_o} r^4 dr$$

4 - En déduire l'énergie potentielle d'une boule de charge q et de rayon a.

1) cf cours : le champ $\vec{E}$ créé en un point M à l'extérieur de la boule de charge $q(r) = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$ est $\vec{E}(M) = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}^2}\vec{u}_{\tilde r}$ et le potentiel $V(\tilde r) = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon_0 \tilde r}$. Pour $\tilde r = r$, on obtient

$$V(r) = \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \boxed{\frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}}$$

2)



2) Le volume compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$ est :

$$d\tau = \frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

↳ à l'ordre 1 en dr $d\tau = \frac{4}{3}\pi\left(r^3 + 3r^2 dr\right) - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 dr$

3) $d\mathcal{E}_p = \underbrace{dq}_{\text{charge dans } d\tau}\cdot V(r)$ potentiel créé par la boule de rayon r dans la zone où on amène dq.

$\Rightarrow d\mathcal{E}_p = 4\pi r^2 dr\,\rho\cdot\frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} \Rightarrow d\mathcal{E}_p = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0} r^4 dr$

4) On intègre ce résultat pour r variant de 0 à a (on construit toute la boule)

$$\Rightarrow \mathcal{E}_p = \int_0^a \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0} r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\frac{a^5}{5}$$

$$\rho = \frac{3q}{4\pi a^3} \Rightarrow \mathcal{E}_p = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\frac{9q^2}{16\pi^2 a^6}\frac{a^5}{5} = \frac{3q^2}{20\pi a}$$

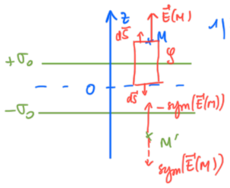
Rq : cette énergie est positive ⇒ l'énergie potentielle augmente lorsqu'on rapproche les charges dq de même signe pour former la boule ⇒ il faut une autre interaction pour maintenir les charges ensemble.

Application :
- * dans un atome, c'est l'interaction forte qui maintient les protons dans le noyau.
- * Si on reprend le même raisonnement pour l'interaction gravitationnelle, on obtient $\mathcal{E}_p < 0$ (force de gravitation attractive)

Condensateur sans théorème de superposition ?

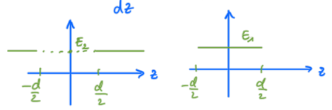
Dans la démonstration du cours, on a utilisé le théorème de superposition pour établir l'expression du champ électrique créé par un condensateur plan. Existe-t-il une autre méthode ?
On considère dans un premier temps un condensateur plan constitué de deux armatures parallèles de surface S portant les charges surfaciques de charges $+\sigma_o$ et $-\sigma_o$. On néglige les effets de bord : on peut ainsi considérer que les armatures sont infinies et que le problème est invariant par translation suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ (en notant $\vec{u}_z$ le vecteur normal aux armatures).

1 - Faire une étude des symétries et justifier que $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$ avec $E(z)$ fonction paire de z.
2 - Justifier à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss que $E(z)$ est alors connu en tout point à une constante près. Représenter l'allure de $E(z)$.
3 - Le théorème de Gauss vous permet-il maintenant de trouver $E(z)$?



1) Invariance : la distribution est invariante par translation suivant $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_x$ $\Rightarrow$ $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$
Symétrie : tous les plans contenant la droite $(M, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie $\Rightarrow$ $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_z$
$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$
De plus : le plan (Oxy) est un plan d'antisymétrie de la distribution $\Rightarrow$ $E(-z) = E(z)$ (voir figure) $\Rightarrow$ $E(z)$ fonction paire

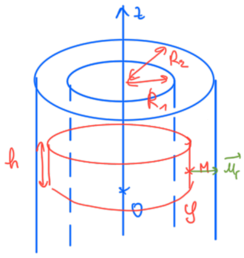
2) En tout point (en dehors des armatures) : $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ (Maxwell-Gauss, $\rho = 0$)
$\Rightarrow \dfrac{dE}{dz} = 0 \Rightarrow E(z)$ constant



On sait que $E(z)$ est constant par morceau et paire mais on ne connait pas E_1 et E_2
$\Rightarrow$ On peut trouver $E_2 - E_1$ à l'aide du théorème de Gauss $\mathcal{S}$ = cylindre de base S (voir figure)
$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
$\Rightarrow E_2 S - E_1 S = \dfrac{\sigma . S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 - E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

On considère cette fois un condensateur cylindrique constitué de deux armatures cylindriques de même axe de révolution (Oz) de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. On néglige les effets de bord : la hauteur H des cylindres est très grande devant la distance $R_2 - R_1$.
Le cylindre intérieur porte la densité surfacique de charge $\sigma_1 > 0$ et le cylindre extérieur σ_2 négative.

1 - Faire une étude des invariances et des symétries du système.
2 - Déterminer le champ $\vec{E}$ entre les armatures en utilisant le théorème de Gauss.



1) Symétrie : Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des plans de symétrie $\Rightarrow$ $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_r$
Invariance : la distribution est invariante par rotation et translation d'axe (Oz) $\Rightarrow$ $E(M) = E(r)$
Finalement : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$

2) Théorème de Gauss : $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\pi r h E(r) = \dfrac{\sigma_1 . 2\pi R_1 h}{\varepsilon_0}$
$\Rightarrow \boxed{E(r) = \dfrac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r}}$

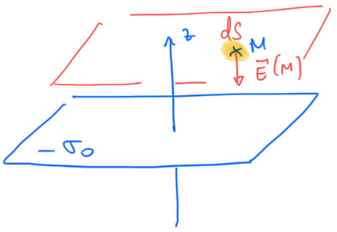
On trouve $E(r)$ avec le théorème de Gauss, on aurait trouvé le même résultat s'il n'y avait pas eu l'armature de rayon R_2.
Pour $r > R_2$, la charge intérieure est nulle (pour un condensateur cylindrique les deux armatures ont des charges totales opposées $\Rightarrow \sigma_1 R_1 = -\sigma_2 R_2$)
$\Rightarrow$ on a alors $\vec{E} = \vec{0}$ pour $r > R_2$ $\Rightarrow$ l'armature de rayon R_2 crée un blindage qui isole la zone $R_1 < r < R_2$.

Force subie par une armature du condensateur

Un condensateur plan est constitué de deux plaques de charges opposées : si on ne les maintenait pas à une distance d, les deux plaques tendraient à se coller l'une à l'autre.
Dans ce qui suit les deux armatures du condensateur ont une surface S et sont perpendiculaires à l'axe (Oz).
1 - Déterminer l'expression de la force subie par l'électrode positive dans le champ créé par l'électrode négative.
2 - Quel est le travail δW de cette force lorsqu'on déplace l'électrode d'une distance dz ?
3 - En déduire l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système. Vérifier que :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

1) On détermine le champ créé par l'électrode portant la charge surfacique $-\sigma_0$ en un point M de l'espace



cf cours : $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{-\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z}$

Tous les éléments dS de l'électrode positive subissent la même force

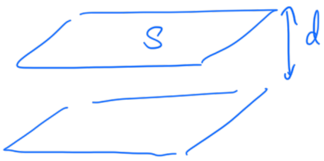
$$d\vec{F} = +\sigma_0\, dS\, \vec{E}(M) = \frac{-\sigma_0^2}{2\varepsilon_0}\, dS\, \vec{u}_z$$

$\Rightarrow$ On en déduit : $\boxed{\vec{F} = -\frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0} S\, \vec{u}_z}$

2) $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{OM}$ avec $d\vec{OM} = dz\, \vec{u}_z$ $\Rightarrow$ $\delta W = -\frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0} S\, dz$

3) On cherche $\mathcal{E}_p$ telle que $\delta W = -d\mathcal{E}_p$ $\Rightarrow$ $d\mathcal{E}_p = \frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0} S\, dz$

soit $\boxed{\mathcal{E}_p = \frac{\sigma_0^2 S}{2\varepsilon_0} z}$ en choisissant $\mathcal{E}_p = 0$ pour $z = 0$ (plaques collées)



$$\begin{cases} C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \\ Q = \sigma_0 S \end{cases}$$

Pour $z = d$:

$$\mathcal{E}_p = \frac{\sigma_0^2 S d}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2 S d}{S^2\, 2\varepsilon_0}$$

soit $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\frac{d}{\varepsilon_0 S} Q^2 = \boxed{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$

(soit $\frac{1}{2} C u^2$ car $Q = C u$)