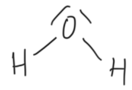
Électromagnétisme
Chapitre 3 - Dipôle électrostatique

Idée : un filet d'eau peut être dévié par un objet préalablement chargé par frottement. Les molécules d'eau sont globalement neutres et ne peuvent être assimilées à des charges ponctuelles, comment interpréter leur comportement sous l'action d'un champ électrostatique ?



I. Potentiel et champ électrostatique créé par un dipôle

(situation dipôle actif)

Un ***dipôle électrostatique*** *peut être assimilé à un ensemble de deux charges ponctuelles. Pour déterminer le champ créé par un dipôle en un point "éloigné", on commence par exprimer le potentiel électrostatique V(M), on en déduit alors :*

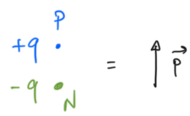
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

1. Approximation dipolaire

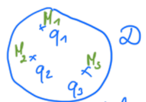
Définition :
On appelle dipôle électrostatique le système constitué de deux charges opposées : $-q$ en N et $+q$ en P dont on étudie les effets à une distance grande devant leur distance mutuelle.
Plus généralement, pour une distribution de charges globalement neutre, le point P désigne le barycentre des charges positives et N le barycentre des charges négatives.
Le vecteur **moment dipolaire** :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$

permet de décrire le comportement du dipôle. Il s'exprime en C.m.



Rq :



$\sum_i q_i = 0$ globalement neutre

↳ Il peut être utile d'écrire $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OM_i}$

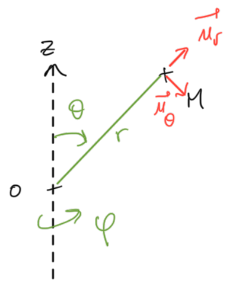
Ordre de grandeur : dans une molécule, la charge q est de l'ordre de 10^{-19}C et la distance inter-atomes est de l'ordre de 10^{-10}m, le moment dipolaire d'une molécule est de l'ordre de 10^{-29}C.m.

2. Potentiel électrostatique

On choisit l'orientation du repère de façon à avoir :

$$\overrightarrow{OP} = a/2\vec{u}_z \ ; \ \overrightarrow{ON} = -a/2\vec{u}_z \Rightarrow \vec{p} = q\ a\ \vec{u}_z$$

On utilise les coordonnées sphériques et on considère un point M tel que $OM \gg a$ (**approximation dipolaire**).

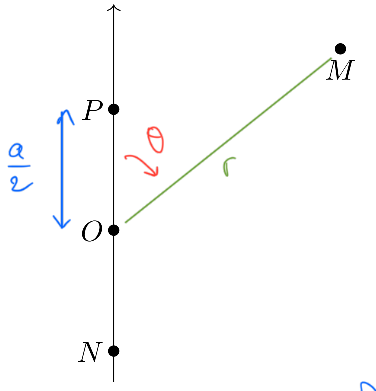


Trièdre direct : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

Invariances : la distribution de charges est invariante par rotation d'axe (Oz) : le potentiel V ne dépend pas de φ.

Symétrie : le plan contenant l'axe (Oz) et le point M est un plan de symétrie : le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan.

Conséquences : on peut mener l'étude dans un plan φ=constante.



$$PM^2 = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})$$
$$= \frac{a^2}{4} + r^2 - 2\, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}$$
$$= \frac{a^2}{4} + r^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot r \cdot \cos\theta$$
$$\Rightarrow \frac{1}{PM} = \left(r^2 \left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right) \right)^{-1/2}$$
$$\simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{a}{r}\cos\theta \right) \right)$$

d.l ordre 1 car $\frac{a}{r} \ll 1$

De même : $\frac{1}{NM} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\cos\theta \right) \right)$

On a d'autre part (théorème de superposition) :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o PM} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o NM}$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}\left(1 + \frac{a\cos\theta}{2r} - 1 + \frac{a\cos\theta}{2r} \right)$$

Soit $V(M) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}$

p

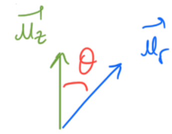
$$\Rightarrow \quad V(M) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Il peut être intéressant de retenir l'expression de V(M).
La démo. est à connaître (une version express est présentée dans les compléments)

Commentaires :

— Le potentiel électrostatique décroit plus rapidement que celui d'une charge ponctuelle ($1/r^2$ dans le cas du dipôle et $1/r$ pour une charge ponctuelle).

— En écrivant : $\vec{p}.\vec{u}_r = p\cos(\theta)$ et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$, on obtient l'expression intrinsèque (c'est-à-dire indépendante du système de coordonnées) :

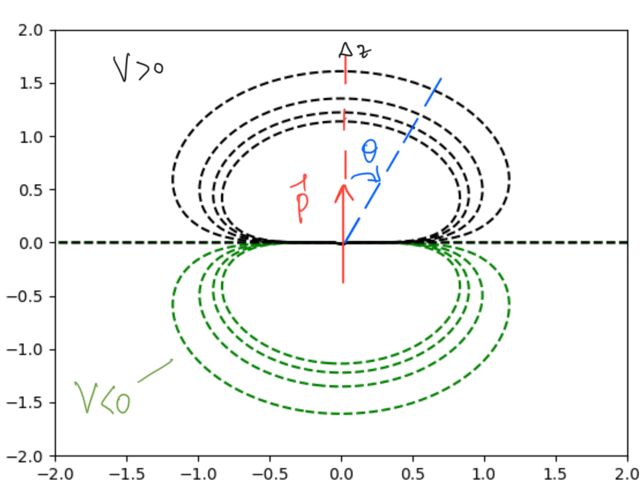


$\vec{u}_z \cdot \vec{u}_r = \cos\theta$

$$V(M) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

— $V(M)$ est positif si $\theta \in [0, \pi/2]$ et négatif pour $\theta \in [\pi/2, \pi]$. L'équipotentielle de valeur $V_o > 0$ a pour équation :

$$r(\theta) = \pm K\sqrt{\cos(\theta)}$$



Allure des surfaces équipotentielles (figure invariante par rotation autour de (Oz))

3. Champ électrostatique créé en M

On en déduit alors l'expression du champ électrostatique :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \ , \ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \ , \ E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\boxed{\Rightarrow E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3} \ ; \ E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3} \ ; \ E_\varphi = 0}$$

Rq : le calcul direct de $\vec{E}$ à l'aide du théorème de superposition serait beaucoup plus complexe

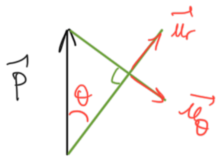
$$\vec{E} = \frac{q\vec{PM}}{4\pi\varepsilon_0 PM^3} - \frac{q\vec{NM}}{4\pi\varepsilon_0 NM^3}$$

vecteurs de directions différentes

Vérification :

- Pour $\theta = 0$: le point M appartient à l'axe (Oz), pour des raisons de symétrie $\vec{E}$ doit être porté par (Oz), ce qui est en accord avec $E_\theta(r, \theta = 0) = 0$.
- Pour $\theta = \pi/2$: le point M appartient au plan médiateur du segment $[PN]$ qui est un plan d'antisymétrie. $\vec{E}(M)$ doit être orthogonal à ce plan : on a bien $E_r(r, \theta = \pi/2) = 0$.

Expression intrinsèque : en écrivant



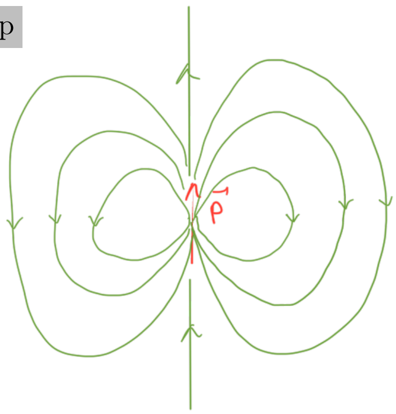
$$\vec{p} = p\cos\theta\vec{u}_r - p\sin\theta\vec{u}_\theta$$

On peut montrer que :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^3}\left(3(\vec{p}.\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}\right)$$

Cette expression est utile notamment lorsqu'on étudie l'interaction entre deux dipôles.

Allure des lignes de champ

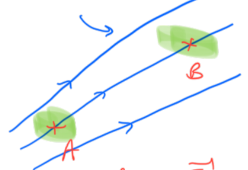


Valable loin du dipôle ($r \gg NP$)

II. Action d'un champ électrostatique extérieur sur le dipôle $\vec{p}$

(situation dipôle passif)

Le dipôle $\vec{p}$ est placé dans une zone où règne un champ électrostatique $\vec{E}_{ext}$ créé par une distribution $\mathcal{D}$.
L'approximation dipolaire permet de considérer ici que le champ $\vec{E}_{ext}$ varie peu au niveau du dipôle (qui est de petite taille par rapport à l'échelle des variations spatiales de $\vec{E}_{ext}$).

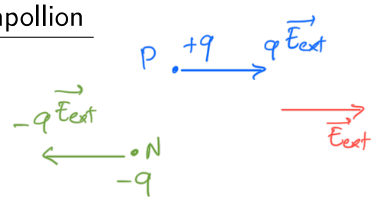


→ le champ $\vec E_{ext}$ varie peu entre les points A et B.

1. Cas d'un champ $\vec{E}_{ext}$ uniforme

L'action subie par le dipôle est caractérisée par sa résultante $\vec{R}$ et son moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ en O.

$$\vec{R} = \underbrace{q\vec{E}_{ext}(P)}_{\text{force subie par la charge } +q \text{ en } P} - \underbrace{q\vec{E}_{ext}(N)}_{\text{force subie par la charge } -q \text{ en } N}$$



Le champ $\vec{E}_{ext}$ étant uniforme, la résultante :

$$\vec{R} = \vec{0}$$

L'action subie par le dipôle est donc un couple : son moment doit être identique en tout point de l'espace. On a en effet :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OP} \wedge q\vec{E}_{ext}(P) + \overrightarrow{ON} \wedge (-q)\vec{E}_{ext}(N)$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = q(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \wedge \vec{E}_{ext} \;\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

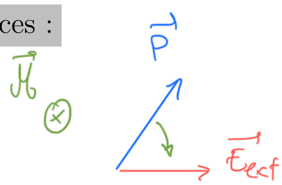
L'action d'un champ électrique extérieur **uniforme** sur un dipôle $\vec{p}$ est un couple de résultante nulle et de moment :

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

L'énergie potentielle associée s'écrit :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p}.\vec{E}_{ext}$$

Conséquences :



Le couple $\vec{M}$ tend à aligner $\vec{p}$ sur les lignes de champ de $\vec{E}_{ext}$ (~ boussole) : $\vec{p}.\vec{E}_{ext}$ est maximum pour $\vec{p}$ et $\vec{E}_{ext}$ colinéaires et de même sens $\Rightarrow$ on a alors $\mathcal{E}_p = -\vec{p}.\vec{E}_{ext}$ minimale.

2. Cas d'un champ $\vec{E}_{ext}$ quasi-uniforme

L'expression du moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ et de l'énergie potentielle sont toujours valables :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p}.\vec{E}_{ext}$$

La résultante $\vec{R}$ n'est plus nulle.

— Si on considère que le dipôle s'est aligné sur une ligne de champ du champ électrique extérieur. L'énergie potentielle est minimale lorsque $\|\vec{E}_{ext}\|$ est maximale. Le dipôle va migrer vers les zones où le champ extérieur est plus intense. On écrit alors dans ce cas (penser à $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$) :

$$R_z = -\frac{d}{dz}(-p_z.E_{ext,z})$$

— L'expression générale de $\vec{R}$:

$$\vec{R} = (\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}})(\vec{E}_{ext})$$

Elle doit être donnée dans les exercices.