Estimer le nombre d'électrons de conduction par unité de volume

1 - On considère un conducteur métallique (du cuivre par exemple). On suppose qu'un électron de conduction est associé à chaque atome de cuivre.
Estimez le nombre d'électrons de conduction à l'aide des ordres de grandeurs suivants :

- Méthode 1 : on fait l'hypothèse que le cuivre cristallise dans une maille cubique de dimension de l'ordre de 10^{-10}m avec 1 atome par maille.
- Méthode 2 : on estime la masse volumique du cuivre à environ 6.10^3kg.m^{-3}, et sa masse molaire est de l'ordre de 60g.mol^{-1}.

2 - Sur le même principe, estimer le nombre d'ions par unité de volume pour une concentration molaire de 0,1 mol/L en ions sodium Na^+.

1) Méthode 1

* 1 atome par maille de $(10^{-10})^3\ m^3$

* À chaque atome correspond 1 e⁻ de conduction soit :

$$\frac{1}{10^{-30}} = 10^{30} \text{ électrons de conduction} / m^3$$

Méthode 2

$$\frac{6.10^3}{6.10^{-2}} \text{ mol de Cu} / m^3$$

$$\Rightarrow 10^5 \times \underbrace{6.10^{23}}_{N_A} \text{ atomes de Cu} / m^3$$

$$\Rightarrow 6.10^{28} \text{ électrons de conduction} / m^3$$

2)

$$0{,}1 \text{ mol/L} \Leftrightarrow \frac{0{,}1 \times 6.10^{23}}{10^{-3}} \text{ ions} / m^3$$

$$\rightarrow 6.10^{25} \text{ ions} / m^3$$

Définition de $\vec{j}$

On note $\vec{v}$ la vitesse d'ensemble des porteurs de charges dans un conducteur comportant n porteurs de charge q par unité de volume.
Soit dS une section élémentaire du conducteur (suffisamment petite pour que $\vec{v}$ soit considérée comme uniforme autour de dS).

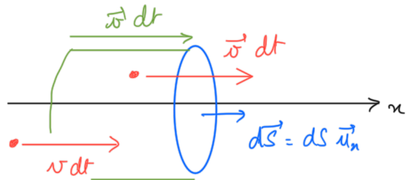
1 - On considère tout d'abord que la section dS est orthogonale à $\vec{u}_x$ et que $\vec{v} = v\ \vec{u}_x$.
Montrer que la quantité de charges dq traversant dS entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$dq = n\ q\ v\ dS\ \ dt$$

2 - Vérifier que le cas où l'orientation relative de $\vec{v}$ et $d\vec{S}$ (vecteur de norme dS, orthogonal à la surface dS) est quelconque, cette relation devient :

$$dq = n\ q\ \vec{v}.d\vec{S}\ dt$$

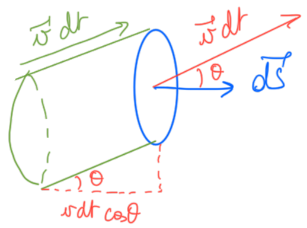
1)



$\Rightarrow$ les porteurs de charges traversant dS entre t et t + dt étaient à l'intérieur du cylindre de hauteur $\vec v\, dt$ et de section S

$$\Rightarrow dq = q \times n \times \underbrace{S\, v\, dt}_{\text{volume du cylindre}}$$

2)



Le calcul est identique mais le volume du cylindre est désormais :

$$dS \times v\, dt \cos\theta \quad (\text{base} \times \text{hauteur})$$

et $\quad v\, dS \cos\theta = \vec v . d\vec S$

$$\Rightarrow dq = \underbrace{q\, n\, \vec v}_{\vec j \text{ vecteur densité de courant.}} . d\vec S\ dt$$

Ordres de grandeur

On considère un fil de cuivre de section $s = 1\text{mm}^2$, parcouru par un courant d'intensité $i = 1\text{A}$. Donner un ordre de grandeur de j, ρ_m et v. Comparer la vitesse d'ensemble des porteurs de charges à la vitesse d'agitation thermique à température ambiante. On donne :

$$n = 10^{29}\ \text{m}^{-3}\ ;\ k_B = 1,4.10^{-23}\ \text{J.K}^{-1}\ ;\ m_e = 10^{-30}\ \text{kg}$$

+ $i = j \cdot s$ si j est uniforme $\Rightarrow$ $j = \dfrac{1}{10^{-6}} = 10^6\ A.m^{-2}$

* $j = \rho_m v$ $\quad |\rho_m| = n.e \Rightarrow |\rho_m| = 10^{29} . 1,6.10^{-19} = 1,6.10^{10}\ C.m^{-3}$

  $v = \dfrac{j}{\rho_m} \Rightarrow v \sim 10^{-4}\ m.s^{-1}$ vitesse d'ensemble des porteurs de charge.

Thermo : $\dfrac{1}{2} m v_{th}^2 = \dfrac{3}{2} k_B T \Rightarrow v_{th} = \sqrt{\dfrac{3 k_B T}{m}}$ A.N : $v_{th} \simeq 10^5\ m.s^{-1}$ (beaucoup plus élevé que v mais mouvement désordonné)

Démonstration de l'équation de conservation de la charge

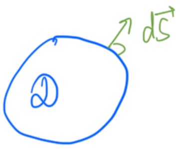
On considère un système $\mathcal{D}$ de surface $\mathcal{S}$. On note $d\vec{S}$ le vecteur normal à $\mathcal{S}$, orienté de l'intérieur vers l'extérieur de $\mathcal{D}$. **1 -** Traduire à l'aide de 3 intégrales le bilan de charge ci-dessous :

Charge dans $\mathcal{D}$ à $t + dt$ = Charge dans $\mathcal{D}$ à t - Charge sortie à travers $\mathcal{S}$ entre t et $t + dt$

2 - Regrouper ces trois intégrales en une intégrale sur $\mathcal{D}$ à l'aide du théorème de Green - Ostrogradski.
3 - En déduire l'équation locale de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$$

$\vec{j}.d\vec{S}\,dt$ = charge traversant $d\vec{S}$



$$\iiint_{M\in\mathcal{D}} \rho(M,t+dt)\,d\tau = \iiint_{M\in\mathcal{D}} \rho(M,t)\,d\tau - \oiint_{P\in S} \vec{j}.d\vec{S}\,dt$$

G.O.

$$\Rightarrow \iiint_{M\in\mathcal{D}} \underbrace{\left(\rho(M,t+dt) - \rho(M,t)\right)}_{\frac{\partial\rho}{\partial t} dt} d\tau = - \iiint_{M\in\mathcal{D}} \text{div}\,\vec{j}\,d\tau\,dt$$

$$\Rightarrow \iiint_{M\in\mathcal{D}} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j}\right) d\tau\,dt = 0$$

Ce résultat est valable quel que soit le volume $\mathcal{D}$, on a donc :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j} = 0$$

Ordre de grandeur

Estimer la résistance d'une bobine de 500 spires circulaires de rayon $r = 3\text{cm}$, pour un fil de cuivre ($\gamma = 6.10^7\text{S.m}^{-1}$) de section $s = 1\text{mm}^2$

On utilise la formule $R = \frac{L}{\gamma S}$ avec $L = 500 \times 2\pi r$

A.N : $R = \frac{10^3 \pi \times 3.10^{-2}}{6\,10^7 \times 10^{-6}} = 1{,}5\ \Omega$

Modèle de Drüde

On considère un conducteur ohmique comportant n électrons de conduction par unité de volume. Ces électrons sont mis en mouvements par un champ électrostatique $\vec{E}$. On modélise l'interaction entre les électrons de conduction (mobiles, de masse m) et les ions fixes constituants le réseau cristallin par une force de frottement fluide :

$$\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$$

1 - Déterminer la vitesse d'ensemble $\vec{v}$ des électrons de conduction en régime permanent en fonction de m, τ et $\vec{E}$.

nb d'e⁻ par unité de volume

2 - En déduire l'expression de la conductivité γ du matériau en fonction de n, e et τ.

3 - Pour le cuivre $\gamma = 6.10^{+7}\text{S.m}^{-1}$, calculer l'ordre de grandeur de τ (on donne $m \simeq 10^{-30}$ kg).

1) PFD appliqué à un électron dans le référentiel du conducteur :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau}\vec{v} - e\vec{E}$$

En régime permanent : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{-e\tau}{m}\vec{E}}$

2) $\vec{j} = -ne\,\vec{v} \Rightarrow \vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$ soit $\boxed{\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}}$

$\rho_m = n$ charges $-e$ par unité de volume

3) $\tau = \frac{m\gamma}{ne^2}$

A.N : $\tau \simeq \frac{10^{-30} \times 6.10^7}{10^{+29} \times (1{,}6.10^{-19})^2} \sim 2\,\frac{10^{-23}}{10^{-9}} = 2.10^{-14}\ \text{s}$