Électromagnétisme
Chapitre 4 - Les transports de charge : les courants

Courant : mouvement d'ensemble de porteurs de charges.
Exemples de milieux conducteurs :
- Conducteur métallique : les électrons de conduction assurent le passage du courant (environ 10^{28} électrons de conduction par m^3).

ex : le cuivre Cu

- Semi-conducteur : le courant est assuré par le déplacement d'électrons et de "lacunes électroniques". Leur densité volumique est beaucoup plus faible (environ 10^{22} par m^3).

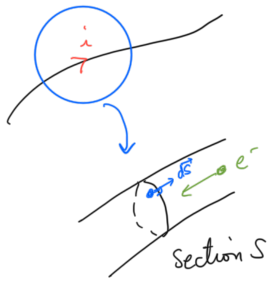
ex : le silicium Si

- En solution aqueuse, les ions assurent le passage du courant.

les cations (+) et les anions (-) se déplacent en sens opposés

I. Distribution de courant

1. Densité volumique de courant



On considère un fil conducteur parcouru par un courant d'intensité i. Soit $\mathcal{S}$ la section du fil, la charge dq traversant $\mathcal{S}$ pendant le temps dt vérifie :

$$dq = i\ dt$$

On introduit le **vecteur densité volumique de courant** $\vec{j}$ tel que :

$$\boxed{\overset{A}{i} = \underbrace{\iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}(P).d\vec{S}^{\,m^2}}_{\text{flux de } \vec{j} \text{ à travers } S}} \Rightarrow \vec{j} \text{ en } A.m^{-2}$$

Le vecteur $\vec{j}$ est proportionnel à la vitesse d'ensemble des porteurs de charges $\vec{v}$ ainsi qu'à la densité volumique de charges mobiles ρ_m.

$$\boxed{\vec{j} = \rho_m \vec{v}}$$

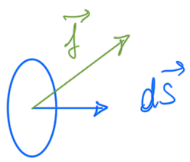
idée : chaque atome du métal cède un électron pour la conduction
↳ comme si on avait $\underbrace{Cu^+}_{\text{fixe}} + \underbrace{e^-}_{\text{mobile}}$
$\Rightarrow \rho = +ne \underbrace{-ne}_{\rho_m}$

Remarque *: S'il y a différents types de porteurs de charges :*

$$\vec{j} = \sum_i \rho_{m,i}\ \vec{v}_i$$

$\vec{j}.d\vec{S}\ dt$ correspond à la charge traversant la surface élémentaire $d\vec{S}$ pendant dt.

ex :



$\vec{j}.\vec{dS} > 0$ la charge dq traverse $d\vec{S}$ de la gauche vers la droite

2. Conservation de la charge

Un des postulats fondamentaux de l'électromagnétisme est la loi de conservation de la charge électrique : il n'existe aucun processus créant ou détruisant de la charge électrique. Ce postulat se traduit localement par une équation liant la densité volumique de charges ρ et le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$.

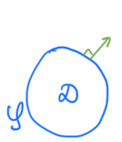
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$$

⚠ ici c'est $\rho(M,t)$ densité volumique de charges en M à t

Commentaires :

— En régime stationnaire :

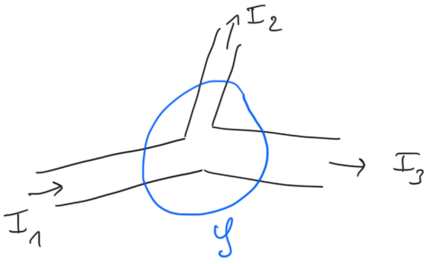
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$$



$$\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{j}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{div}\,\vec{j}\, d\tau$$

$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \Leftrightarrow$ le flux de $\vec{j}$ à travers une surface fermée est nul.

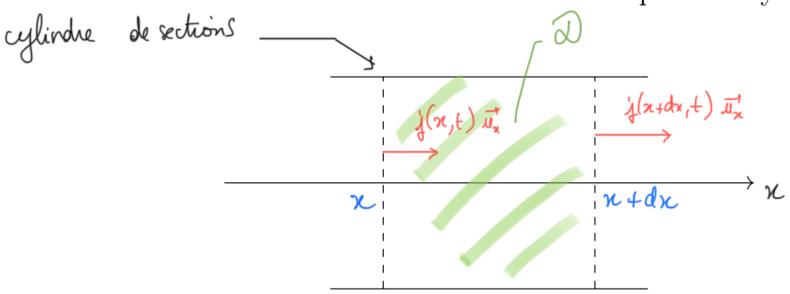
$\vec{j}$ est à flux conservatif : il s'agit de la loi des nœuds qui n'est plus valable en régime variable.



$$\oint \vec{j}\cdot\vec{dS} = I_1 - I_2 - I_3$$

$$\oint \vec{j}\cdot\vec{dS} = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3$$

— Il faut savoir faire la démonstration pour un système à une dimension.



$\vec{j} = j(x,t)\,\vec{u_x}$

$\rho = \rho(x,t)$

$dq = j\,S\,dt$ charge traversant S pendant dt

charge dans $\mathcal{D}$ à $t+dt$ = charge dans $\mathcal{D}$ à t + charge entrée en x pendant dt − charge sortie en $x+dx$ pendant dt

$$\underbrace{\rho(x,t+dt)}_{\text{densité volumique de charge}}\ \underbrace{S\,dx}_{\text{volume de }\mathcal{D}} = \rho(x,t)\,S\,dx + j(x,t)\,S\,dt - j(x+dx,t)\,S\,dt$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Big(\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)\Big)}_{\frac{\partial \rho}{\partial t}dt}\, S\,dx = -\underbrace{\Big(j(x+dx,t) - j(x,t)\Big)}_{\frac{\partial j}{\partial x}dx}\, S\,dt$$

Soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$

Rq : pour $\vec{j} = j(x,t)\,\vec{u_x}$, on a bien : $\mathrm{div}\,\vec{j} = \frac{\partial j}{\partial x}$

II. Cas des conducteurs ohmiques

1. Loi d'Ohm locale

Dans le cas des conducteurs ohmiques, on a vu la relation :

$$\text{A} — i = \frac{u_R}{R} \quad \begin{matrix} — \text{V} \\ — \Omega \end{matrix}$$

La **loi d'Ohm locale** traduit localement ce lien entre le courant ($\vec{j}$ au niveau local) et la tension ($\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ au niveau local).
Elle fait intervenir la **conductivité** du matériau (notée γ en général) :

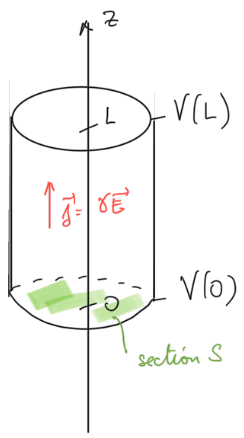
$$\text{A.m}^{-2} — \vec{j} = \gamma \vec{E} — \text{V.m}^{-1}$$

$\Rightarrow \gamma$ en $\frac{\text{A}}{\text{V}}.\text{m}^{-1}$ soit $\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$

Il s'agit d'une loi **phénoménologique** (elle n'est pas démontrée mais validée par les résultats expérimentaux).

La conductivité du cuivre (bon conducteur) est de 6.10^7 S.m^{-1}. | 1 Siemens (S) = $1\Omega^{-1}$
Le modèle du conducteur parfait correspond à la limite $\gamma \to \infty$.

2. Résistance d'un cylindre conducteur



On considère un cylindre d'axe (Oz), de section S, de conductivité γ, soumis à une différence de potentiel telle que :

$$V(0) = U \; ; V(L) = 0$$

Le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ est considéré uniforme[1] :

$$\vec{j} = j \, \vec{u}_z$$

Le courant à travers S :

$$i = \iint_S \vec{j}.d\vec{S} \Rightarrow i = jS$$ car j est uniforme

On a d'autre part :

$$U \;=\; V(0) - V(L) \;=\; \int_0^L -dV \Leftrightarrow U = \int_0^L \vec{E}.d\vec{\ell}$$

En utilisant la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow U = \frac{1}{\gamma} \int_0^L \vec{j}.d\vec{\ell}$$

Comme j est uniforme :

$$U = \frac{L}{\gamma} j$$

Et finalement :

$$U = \frac{L}{\gamma S} i$$

La résistance d'un cylindre conducteur de longueur L et de section S s'écrit donc :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

à connaître et à savoir démontrer

1. Cette hypothèse sera discutée dans le cours sur l'effet de peau.