

## Électromagnétisme Chapitre 5 - Magnétostatique

**Force de Lorentz** subie par une particule chargée dans un champ  $\vec{E}, \vec{B}$  :

$$\vec{F}_{Lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

**Force de Laplace :**

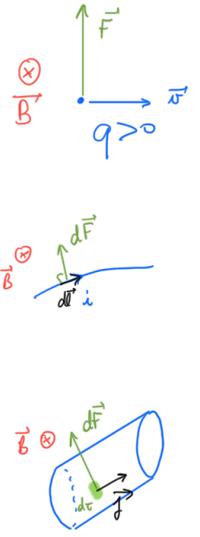
— subie par un élément de circuit  $d\vec{\ell}$  parcouru par un courant d'intensité  $i$  :

$$d\vec{F}_{Lap} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

— On peut également écrire la force de Laplace au niveau local, dans le cas d'un élément de volume  $d\tau$  en utilisant le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  :

$$d\vec{F}_{Lap} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

$\vec{j}$  : vecteur densité volumique de courant ( $A \cdot m^{-2}$ )  
 $[j d\tau] = [i d\ell]$



### I. Équations intégrales et locales de la magnétostatique

#### 1. Flux de $\vec{B}$ - Équation de Maxwell Flux

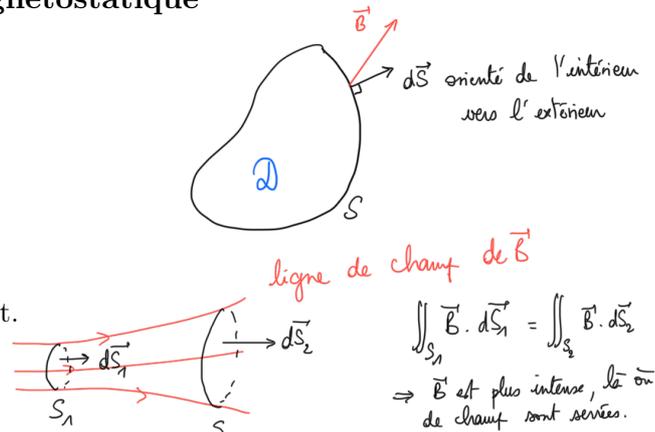
Soit  $S$  une surface fermée :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

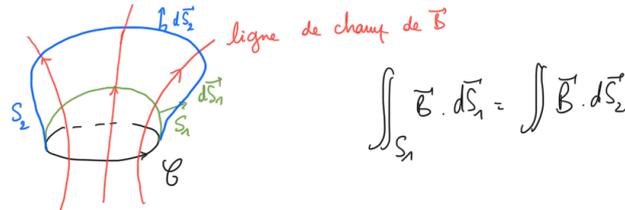
$\vec{B}$  est à flux conservatif.

**Conséquences :**

— Un tube de champ transporte un flux constant.



— Soit  $C$  un contour fermé orienté. Le flux de  $\vec{B}$  à travers toutes les surfaces s'appuyant sur  $C$  est identique.



ligne de champ de  $\vec{B}$

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2$$

$\Rightarrow \vec{B}$  est plus intense, là où les lignes de champ sont serrées.

Dans la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

$\phi$  = flux de  $\vec{B}$  à travers une surface s'appuyant sur  $C$

On en déduit également l'équation de Maxwell-Flux :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

appelée aussi  
Equation de Maxwell - Thomson

## 2. Circulation de $\vec{B}$ - Équation de Maxwell Ampère

On part cette fois de l'équation de **Maxwell-Ampère** :

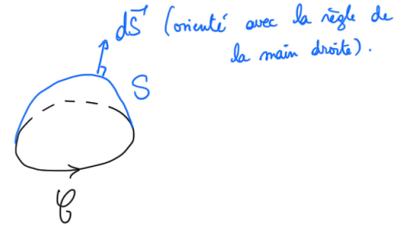
$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

- Équation locale, reliant le champ magnétostatique<sup>1</sup>  $\vec{B}$  à sa source  $\vec{j}$ .
- $\mu_0$  désigne la **perméabilité du vide**. On peut retenir la valeur :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$$

Passons à la forme intégrale : soit  $\mathcal{C}$  un contour fermé orienté

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

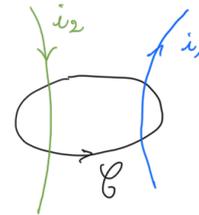


Soit en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

On obtient le **théorème d'Ampère** :

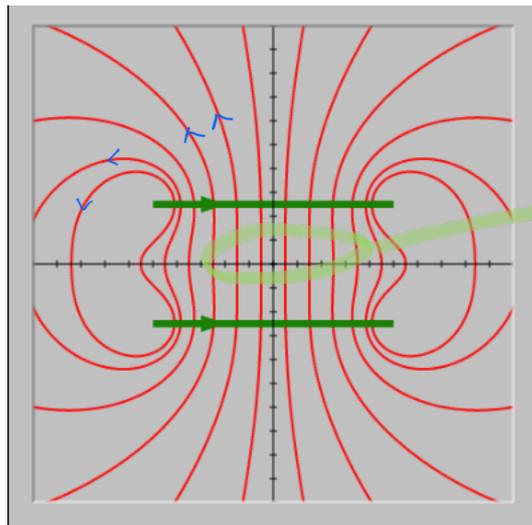
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlace}}$$



"La circulation de  $\vec{B}$  sur le contour fermé  $\mathcal{C}$  est égale à  $\mu_0$  fois le courant  $I$  enlacé par  $\mathcal{C}$ "

## 3. Topographie

- Les lignes de champ sont des courbes fermées qui s'enroulent autour des sources (ou se ferment à l'infini voir exemple du solénoïde infini).
- Les lignes de champ sont orientées par la règle de la main droite.
- Un tube de champ transporte un flux constant : le champ magnétique est plus intense là où les lignes de champ se resserrent.



Bobines de Helmholtz: 2 bobines identiques de rayon  $R$ , distantes de  $R$

Ce système permet d'avoir un champ quasi uniforme entre les bobines.

FIGURE 1 – <http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/mnelectricite.html>

1. Il faut la modifier en régime variable.

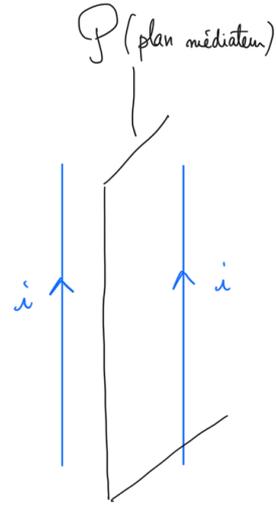
## II. Calculs de champs magnétostatiques

### 1. Invariances et symétrie

#### Plans de symétrie :

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de symétrie de la distribution de courants :

- \* Si  $M \in \mathcal{P}$ , alors  $\vec{B}(M) \perp \mathcal{P}$
- \*  $M'_1 = \text{sym}_{\mathcal{P}}(M_1)$ ,  $\vec{B}(M'_1) = -\text{sym}_{\mathcal{P}}(\vec{B}(M_1))$



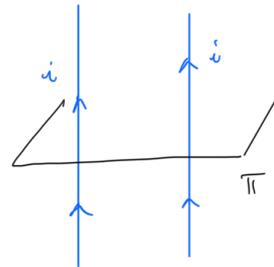
On dit que  $\vec{B}$  est un vecteur axial

⚠ il y a plus de plans d'antisymétrie qu'en électrostatique

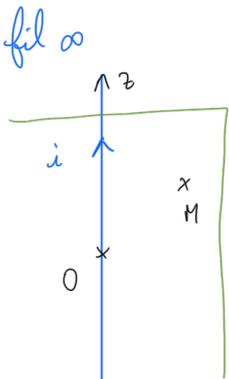
#### Plans d'antisymétrie :

Soit  $\Pi$  un plan d'antisymétrie de la distribution de courants :

- \* Si  $M \in \Pi$ ,  $\vec{B}(M) \in \Pi$
- \*  $M'_1 = \text{sym}_{\Pi}(M_1)$ ,  $\vec{B}(M'_1) = \text{sym}_{\Pi}(\vec{B}(M_1))$



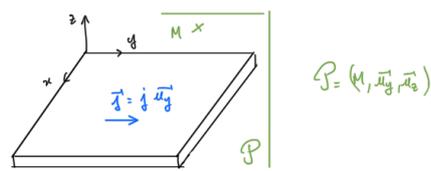
Invariances :  $\vec{B}$  présente les mêmes invariances que la distribution de courant.



Symétries : le plan contenant  $(Oz)$  et le point  $M$  est un plan de symétrie  
 $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_z$

Invariances : la distribution de courant est invariante par translation suivant  $\vec{u}_z$  et par rotation autour de  $(Oz)$   
 $\Rightarrow B(M) = B(r, \phi, z)$

Finalement :  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$



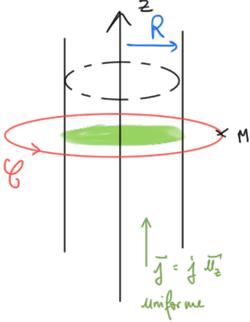
$\mathcal{P} = (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Symétries : le plan  $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de courants  
 $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_x \quad (\perp \mathcal{P})$

Invariances : la distribution de courants est invariante par translation suivant  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$   
 $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(x, y, z) \vec{u}_x$

Finalement :  $\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_x$

2. Câble rectiligne infini



Symétries : le plan contenant  $(Oz)$  et le point M est un plan de symétrie

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_\phi$$

Invariances : la distribution de courants est invariante par translation suivant  $\vec{u}_z$  et par rotation autour de  $(Oz)$

$$\Rightarrow B(M) = B(r, \phi, z)$$

Enfinement :  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\phi$

Théorème d'Amperé :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl\acute{e}}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{cercle} B(r) dl = 2\pi r B(r)$$

$\mathcal{C}$  = cercle d'axe  $(Oz)$  passant par M

1<sup>er</sup> cas  $r \geq R$   $I_{encl\acute{e}} = j \cdot \pi R^2$

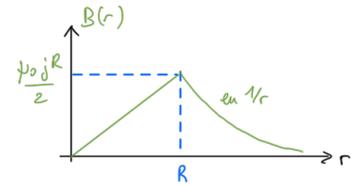
$$\Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 j \pi R^2$$

$$\text{soit } B(r) = \frac{\mu_0 j R^2}{r}$$

2<sup>e</sup> cas :  $0 \leq r \leq R$   $I_{encl\acute{e}} = \pi r^2 j$

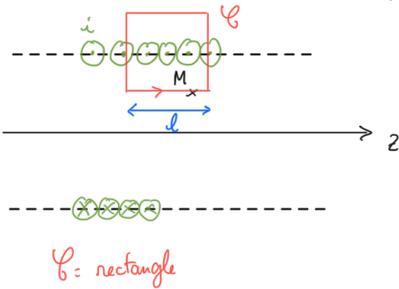
$$\Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 \pi r^2 j$$

$$\text{soit } B(r) = \frac{\mu_0 j r}{2}$$



B est continu en  $r=R$

3. Solénoïde infini



*n spires par unité de longueur*

*spires circulaires de rayon a parcourues par un courant d'intensité i*

*On admet que le champ magnétique est nul en dehors du solénoïde (idée = les lignes de champ sont piégées dans le solénoïde).*

Symétries : le plan perpendiculaire à  $(Oz)$  passant par M est un plan de symétrie de la distribution de courant

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_z$$

Invariances : la distribution de courant est invariante par translation suivant  $\vec{u}_z$  et par rotation autour de  $(Oz)$

$$\Rightarrow B(M) = B(r, \phi, z)$$

Enfinement :  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$

Théorème d'Amperé :  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl\acute{e}}$

$$\Rightarrow \ell B(r) = \mu_0 n \ell i$$

$$\Rightarrow B(r) = \mu_0 n i \text{ uniforme dans le solénoïde}$$

### III. Dipôle magnétostatique

#### 1. Moment magnétique

Les lignes de champ du champ magnétique créées à grande distance par un circuit  $\mathcal{C}$  et par un aimant ont la même allure. On définit alors le **moment magnétique** associé à une boucle de courant plane :

$$\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S}$$

Pour une boucle de courant de rayon 3cm parcouru par un courant de 1 A, on a :

$$\mathcal{M} = 1 * 3 * 9.10^{-4} = 3.10^{-3} \text{ A.m}^2$$

Si on a une bobine plate de 500 spires :

$$\mathcal{M}_{bobine} = NiS \Rightarrow \mathcal{M}_{bobine} \simeq 1 \text{ A.m}^2$$

Pour un petit aimant, on peut retenir l'ordre de grandeur de 1 A.m<sup>2</sup>.

#### 2. Champ magnétique créé par un dipôle

Par analogie avec le champ électrique créé par un dipôle électrique, on écrit :

$$B_r = \frac{2\mu_0 \mathcal{M} \cos(\theta)}{4\pi r^3}; B_\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin(\theta)}{4\pi r^3}; B_\varphi = 0$$

On peut également utiliser l'expression intrinsèque :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left( 3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{\mathcal{M}} \right)$$

#### 3. Action d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle

**Champ magnétique uniforme** : le dipôle  $\vec{\mathcal{M}}$  est placé dans une zone où règne le champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}_{ext}$ . Il subit un couple :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$$

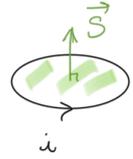
qui tend à l'**orienter** le long des lignes de champ. L'énergie potentielle associée :

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$$

Elle est minimale pour  $\vec{\mathcal{M}}$  colinéaire à  $\vec{B}_{ext}$  et de même sens que  $\vec{B}_{ext}$ .

**Champ magnétique quasi-uniforme** : dans le cas d'un champ quasi-uniforme, le dipôle va également migrer vers les zones où le champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$  est le plus intense, sous l'action d'une force :

$$\vec{F} = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \text{grad}) \vec{B}_{ext}$$



$\vec{S}$  orienté par la règle de la main droite  
 $\|\vec{S}\| = \text{sur face du circuit}$

