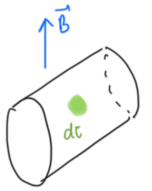
Lien entre la force de Lorentz et la force de Laplace

On considère un conducteur de cylindrique de section $\mathcal{S}$. Ce conducteur comporte n porteurs de charges par unité de volume (charge q, vitesse d'ensemble $\vec{v}$). Ce conducteur est placé dans une zone où règne un champ magnétique $\vec{B}$.
Déterminer la résultante $d\vec{R}$ des forces de Lorentz subies par les charges q contenues dans un volume élémentaire $d\tau$.
Écrire $d\vec{R}$ en fonction de $\vec{j}$.



Une charge q de vitesse $\vec v$ subit $\vec F_{Lorentz} = q\vec v \wedge \vec B$

$d\tau$ comporte $n\,d\tau$ charges q de vitesse $\vec v$

$\Rightarrow d\vec R = n\,d\tau\, q\,\vec v \wedge \vec B$

On identifie $\vec j = \underbrace{nq}_{\rho_m} \vec v$ (n charges mobiles q par unité de volume)

Soit $\boxed{d\vec R = \vec j \wedge \vec B\, d\tau}$

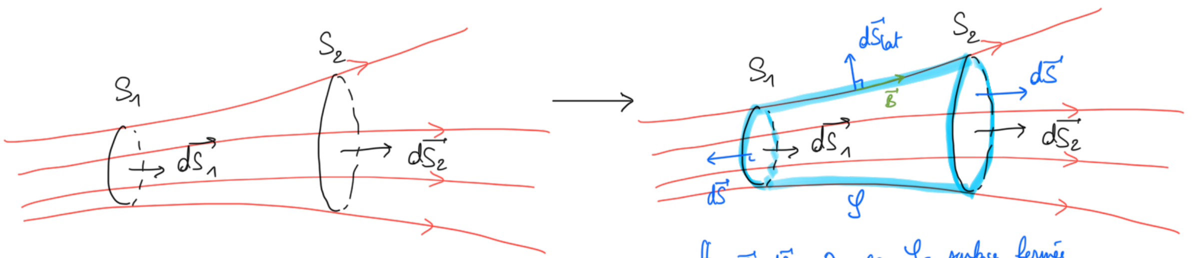
Propriété d'un champ à flux conservatif

On a vu que le champ magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif :

$$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \iff \oiint_{\mathcal S} \vec B \cdot d\vec S = 0$$

Déduire de cette propriété les deux affirmations suivantes :
- Un tube de champ transporte un flux constant.
- Le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface s'appuyant sur un même contour $\mathcal{C}$ est identique.

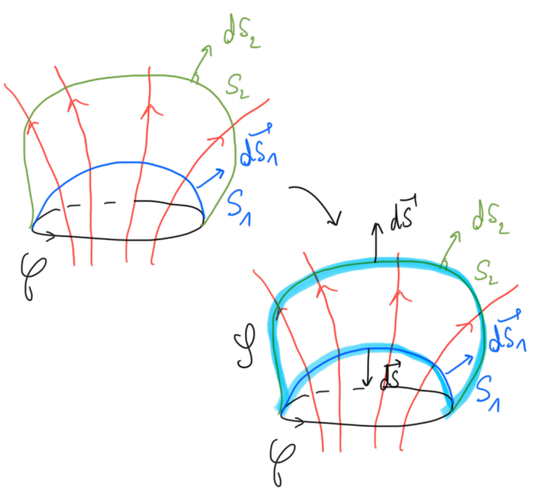
On se ramènera pour cela à l'étude d'une surface fermée.



$\oiint_{\mathcal S} \vec B \cdot d\vec S = 0$ car $\mathcal S$ = surface fermée

$\iint_{S_1} \vec B \cdot \underbrace{d\vec S}_{=-d\vec S_1} + \underbrace{\iint_{S_{lat}} \vec B \cdot d\vec S_{lat}}_{0 \text{ car } \vec B \perp d\vec S_{lat}} + \iint_{S_2} \vec B \cdot d\vec S_2 = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} \vec B \cdot d\vec S_1 = \iint_{S_2} \vec B \cdot d\vec S_2$

car $d\vec S$ est orienté de l'intérieur vers l'extérieur



$\oiint_{\mathcal S} \vec B \cdot d\vec S = 0$ car $\mathcal S$ surface fermée

$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec B \cdot \underbrace{d\vec S}_{=-d\vec S_1} + \iint_{S_2} \vec B \cdot \underbrace{d\vec S}_{=d\vec S_2} = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} \vec B \cdot d\vec S_1 = \iint_{S_2} \vec B \cdot d\vec S_2$

Exploitation de l'équation de conservation de la charge

On peut montrer en écrivant la relation en coordonnées cartésiennes que pour tout champ de vecteurs $\vec{A}$:

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}) = 0$$

Lorsqu'on applique l'opérateur divergence à l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}) = \mathrm{div}(\mu_o \vec{j}) \Rightarrow \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$$

Proposer une modification de l'équation de Maxwell-Ampère qui permettent de retrouver l'équation de conservation de la charge en régime variable lorsqu'on applique l'opérateur divergence :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}) = \ldots \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$$

idée : $\rho = \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\,\vec{E}$ d'après l'équation de Maxwell-Gauss

$\Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \,\mathrm{div}\,\vec{E}\right) + \mathrm{div}\,\vec{j}$

commutent car $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2}{\partial t \partial x}$ (variables indépendantes)

$\Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = \mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\right)$

$\Rightarrow$ On remplace $\vec{j}$ par $\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère

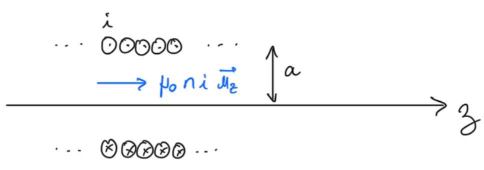
$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}$$

Inductance propre d'un solénoïde

On a montré que le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini est uniforme et que :

$$\vec{B} = \mu_o \, n \, i$$

En déduire l'expression de l'inductance propre L d'une section de longueur H de solénoïde.



Le flux de $\vec{B}$ à travers une spire circulaire de rayon a :

$\phi_1 = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \phi_1 = \mu_0 n i \pi a^2$ car $\vec{B}$ uniforme

Une section de longueur H comporte nH spires :

$\phi_H = nH \mu_0 n i \pi a^2$
$\quad = (\mu_0 n^2 H \pi a^2)\, i$

$\phi = L i$

$\Rightarrow$ On a donc $L_H = \mu_0 n^2 H \pi a^2$

Dipôle magnétique

1 - Construire une grandeur ayant la dimension d'un moment magnétique à l'aide des constantes ci-dessous :

$$e = 1,6.10^{-19}\text{C} \ , \ m_e = 9,1.10^{-31}\text{kg} \ , \ \hbar = 1.10^{-34}\text{J.s}$$

La valeur obtenue est - à une constante près - appelée magnéton de Bohr. Elle donne un ordre de grandeur du moment magnétique à l'échelle atomique.

2 - Dans un aimant, les différents moments magnétiques atomiques s'ajoutent et on peut associer un moment magnétique global à l'aimant. En considérant un matériau comportant 10^{29} atomes par unité de volume, estimer le moment magnétique d'un aimant de 10^{-7}m^3 (1cm*1cm*1mm). On pourra retenir qu'un bon ordre de grandeur du moment magnétique d'un aimant (même si il varie beaucoup d'un aimant à un autre) est environ 1 A.m^2.

1) $[\mathcal{M}] = A.m^{-2} = \frac{C}{s} m^{-2}$ $\qquad [\hbar] = J.s = kg.m^2.s^{-2}.s$

$\Rightarrow \left[\frac{\hbar e}{m}\right] = \frac{\cancel{kg}\ m^2.s^{-1}\ C}{\cancel{kg}} = C.s^{-1}.m^{-2}$ $\qquad$ A.N $\mu_B \simeq \frac{10^{-34}.10^{-19}}{10^{-30}} = 10^{-23}\ A.m^2$

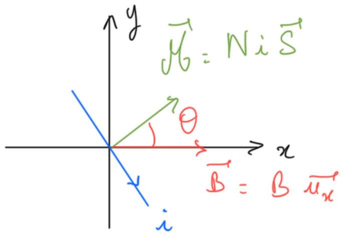
2) $\mathcal{M}_{aimant} = N\mu_B$ avec $N = nV$

A.N : $\mathcal{M}_{aimant} = 10^{29}.10^{-7}.10^{-23} = 10^{-1}\ A.m^2$

Dipôle dans un champ B : induction

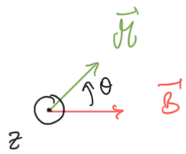
1 - On considère une bobine circulaire plate comportant N spires, pouvant tourner autour d'un de ses diamètres noté (Oz). Elle est placée dans une zone où règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire à (Oz). Déterminer l'action de Laplace subie par la bobine en l'assimilant à un dipôle magnétique.

2 - On considère une boussole placée dans le champ magnétique terrestre. Montrer que si on écarte la boussole de sa position d'équilibre, elle va osciller avec une période propre T_o qui dépend de la valeur du champ magnétique terrestre.



1) On associe le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = Ni\vec{S}$ au circuit constitué par les N spires.
Ce dipôle placé dans le champ $\vec{B}$ uniforme subit le couple

$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}}$ $\Rightarrow \vec{\Gamma} = -NiSB\sin\theta\,\vec{u}_z$

2) 

La boussole subit le couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ soit $\vec{\Gamma} = -\mathcal{M}B\sin\theta\,\vec{u}_z$

On note J son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation (Oz)

Le théorème du moment cinétique en projection sur (Oz) s'écrit :

$$J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B\sin\theta$$

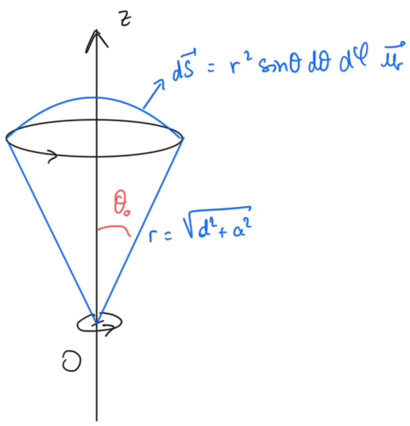
$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M}B}{J}\theta = 0$ dans le cas des petites oscillations ($\sin\theta \simeq \theta$)

$\Rightarrow$ oscillations à $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{M}B}{J}}}$ soit $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}}}$

Inductance mutuelle

On cherche le coefficient d'inductance mutuelle M entre une spire de rayon a, d'axe (Oz), parcourue par un courant i_o et une spire de rayon $b \ll a$, d'axe (Oz) également, parcourue par un courant i. Les deux spires sont distantes de d, la petite spire est placée en O.
Déterminer M en assimilant la petite spire à un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$. On rappelle l'expression du champ magnétique créé par un dipôle :

$$B_r = \frac{2\mu_o \mathcal{M}\cos(\theta)}{4\pi r^3} \; ; \; B_\theta = \frac{\mu_o \mathcal{M}\sin(\theta)}{4\pi r^3} \; ; \; B_\varphi = 0$$



On calcule le flux du champ magnétique créé par le dipôle $\vec{\mathcal{M}} = \pi b^2 i \, \vec{u_z}$ placé en O à travers la spire de rayon a.
Ce flux ne dépend pas du choix de la surface s'appuyant sur la spire
↳ on choisit une calotte sphérique de centre O et de rayon $r = \sqrt{d^2+a^2}$

$$\phi = \int_{\theta=0}^{\theta_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{B} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{u_r}$$

$$= 2\pi \int_0^{\theta_0} \frac{\mu_0 \mathcal{M} \, r^2}{4\pi r^3} 2\cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2r} \left[\sin^2\theta \right]_0^{\theta_0}$$

$$= \mu_0 \frac{\pi b^2 i}{2 r} \sin^2\theta_0$$

$\sin\theta_0 = \frac{a}{r}$, $r = \sqrt{d^2+a^2}$ et $\phi = M i$

On a alors $\boxed{M = \frac{\mu_0 \pi b^2}{2} \frac{a^2}{(d^2+a^2)^{3/2}}}$