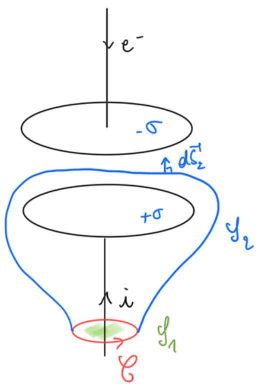
Exemple : condensateur plan

On considère un condensateur plan formé par deux armatures parallèles de surface S, distantes de e. On se place en régime lentement variable : un courant i entraine une variation de la charge des armatures du condensateur (densité surfacique de charge $\pm\sigma(t)$).
On suppose que le champ électrique créé par le condensateur garde l'expression obtenue en statique : il vaut $\frac{\sigma}{\varepsilon_o}$ entre les armatures et on le considèrera nul en-dehors.

1. On considère un contour entourant le fil parcouru par le courant i. En appliquant le théorème de Stokes, montrer que la circulation de $\vec{B}$ sur ce contour est proportionnelle au flux des vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{j}_d$.
2. Calculer ces flux pour deux surfaces s'appuyant sur le contour : une première surface plane, la seconde passant entre les deux armatures.
3. En déduire la relation :
$$i = \frac{dQ}{dt}$$
avec $Q(t) = \sigma(t)S$.



D'après le théorème de Stokes, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{\text{rot}}\,\vec{B}).d\vec{S}$

$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux contours s'appuyant sur $\mathcal{C}$, on a ainsi :
$$\iint_{\mathcal{S}_1} (\vec{\text{rot}}\,\vec{B}).d\vec{S}_1 = \iint_{\mathcal{S}_2} (\vec{\text{rot}}\,\vec{B}).d\vec{S}_2 \quad \text{avec } \vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)$$

Sur $\mathcal{S}_1$: $\vec{j}_D = \vec{0}$ car $\vec{E} = \vec{0}$ (on est en dehors du condensateur)
$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{S}_1} (\vec{\text{rot}}\,\vec{B}).d\vec{S}_1 = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{j}.d\vec{S}_1 = \mu_0 i$$

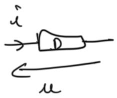
Sur $\mathcal{S}_2$: $\vec{j} = \vec{0}$ (isolant entre les 2 armatures), $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{d\sigma}{dt}(t)\,\vec{u}_z$
$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{S}_2} (\vec{\text{rot}}\,\vec{B}).d\vec{S}_2 = \iint_{\mathcal{S}_2} \mu_0 \vec{j}_D.d\vec{S}_2 = \mu_0 S.\frac{d\sigma(t)}{dt} = \mu_0 \frac{dQ}{dt} \quad \text{avec } Q = S\sigma$$

On a ainsi $\boxed{i = \frac{dQ}{dt}}$ (conservation de la charge)

Analyse dimensionnelle

Vérifier les dimensions des différents termes intervenant dans l'équation de Poynting :
- La puissance volumique cédée à la matière $\vec{j}.\vec{E}$ en W.m^{-3} ;
- La densité volumique en énergie électrique : $\frac{\varepsilon_o E^2}{2}$ en J.m^{-3} ;
- La densité volumique en énergie magnétique : $\frac{B^2}{2\mu_o}$ en J.m^{-3} ;
- Le vecteur de Poynting $\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_o}$ en W.m^{-2}.

$$[\vec{j}.\vec{E}] = \frac{A}{m^2}.\frac{V}{m} = \frac{W}{m^3}$$

(on rappelle


$u\,i$ = puissance dissipée par le dipôle récepteur D)

$$\left[\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right] = \left[\frac{Q}{r^2}\right][E] = \frac{C.V}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

rappel $E_p = qV$ énergie potentielle électrostatique

$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

n en m^{-1}

force de Laplace

$$\left[\frac{B^2}{2\mu_0}\right] = \left[\frac{\mu_0 n i}{\mu_0}\right][B] = \frac{[iB]}{m} = \frac{[i\,l\,B]}{m^2} = \frac{\text{énergie}}{m^3}$$

(travail = force × déplacement)

champ créé par un solénoïde

n en m^{-1}

$$\left[\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right] = [E]\left[\frac{\mu_0 n i}{\mu_0}\right] = \frac{V}{m}\,\frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$$

Retrouver l'équation de Poynting à partir des équations de Maxwell.

On peut construire la forme de l'équation de Poynting en faisant un bilan comme pour l'équation de conservation de la charge :

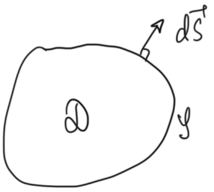
énergie dans $\mathcal{D}$ à $t+dt$ = énergie dans $\mathcal{D}$ à t - énergie sortie à travers $\mathcal{S}$ pendant dt - énergie absorbée par la matière pendant dt.

On obtient ainsi la forme de l'équation mais on ne connait que le dernier terme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\Pi}) = -\vec{j}.\vec{E}$$

1. Établir cette équation en notant u la densité volumique en énergie électromagnétique (analogue à ρ) et $\vec{\Pi}$ le vecteur densité de flux de puissance électromagnétique (analogue à $\vec{j}$).
2. Forcer l'apparition du terme $\vec{j}.\vec{E}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère.
3. Retrouver alors les expressions de u et de $\vec{\Pi}$ en utilisant la relation suivante :

$$\mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} + \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$$



1) $$\iiint_{\mathcal{D}} u(t+dt,M)\,d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} u(t,M)\,d\tau - \underbrace{\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi}.d\vec{S}\,dt}_{\text{puissance électromagnétique sortant à travers } \mathcal{S}} - \underbrace{\iiint_{\mathcal{D}} \vec{j}.\vec{E}\,d\tau\,dt}_{\text{puissance absorbée par la matière dans } \mathcal{D}}$$

G.O.

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{D}} \overbrace{\left(u(t+dt,M) - u(t,M)\right)}^{\frac{\partial u}{\partial t}dt} d\tau = -\iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{div}\,\vec{\Pi}\,d\tau\,dt - \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j}.\vec{E}\,d\tau\,dt$$

$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} + \vec{j}.\vec{E}\right) d\tau\,dt = 0 \Rightarrow$ ce résultat est valable quel que soit $\mathcal{D}$, on a donc $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = -\vec{j}.\vec{E}}$

2) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right).\vec{E} = \vec{j}.\vec{E} + \underbrace{\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right)}$

On a d'autre part $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}).\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \underbrace{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\frac{\vec{B}}{\mu_0}}_{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)}$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right).\vec{E} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}).\frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right)$ d'après le formulaire

On a donc $-\mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{j}.\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)}_{u} + \mathrm{div}\underbrace{\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right)}_{\vec{\Pi}} = -\vec{j}.\vec{E}$$

Bilan énergétique : condensateur en régime lentement variable

On considère un condensateur soumis à un courant :

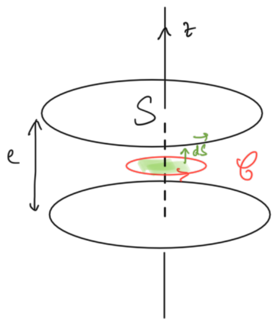
$$i(t) = i_o \cos(\omega t)$$

La longueur d'onde associée $\frac{2\pi c}{\omega}$ reste grande par rapport aux dimensions du condensateur ce qui permet de rester dans l'ARQS. On admet que l'expression du champ $\vec{E}$ est alors inchangée par rapport à la situation vue en électrostatique :

$$\vec{E}(t) = E(t)\vec{u}_z$$

avec $E(t)$ uniforme entre les armatures et nul en dehors.

1. Justifier l'existence d'un champ magnétique entre les armatures et déterminer son expression. On admettra que le champ magnétique s'écrit sous la forme : $\vec{B}(M,t) = B(r,t)\vec{u}_\theta$.
2. Comparer les énergies volumiques électriques et magnétiques. Conclusion.



1) $\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ Entre les armatures $\vec{j} = \vec{0}$ mais $\vec{j_D} = \varepsilon_0 E'(t)\vec{u_z} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{j_D} \Rightarrow$ existence d'un champ $\vec{B}$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} \underset{\text{Stokes}}{=} \iint_{\mathcal{S}} (\vec{\text{rot}}\,\vec{B})\cdot\vec{dS}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} B(r,t)\,dl = \iint_{\mathcal{S}} \mu_0\varepsilon_0 E'(t)\,dS \quad \text{soit} \quad 2\pi r B = \mu_0\varepsilon_0 E'(t)\pi r^2 \Rightarrow B = \mu_0 \frac{\varepsilon_0 E' r}{2}$$

2) $$\frac{\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}{\frac{B^2}{2\mu_0}} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{E^2}{\left(\frac{\mu_0\varepsilon_0 E' r}{2}\right)^2} \sim \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{E^2}{\omega^2 E^2 r^2} = \frac{c^2}{\omega^2}\frac{1}{r^2}$$

$E' \sim \omega E$ pour E sinusoïdal

$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$, on a donc : $\frac{\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}{\frac{B^2}{2\mu_0}} \sim \left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 \gg 1$ dans le cadre de l'ARQS

$\Rightarrow$ dans le condensateur, l'énergie est essentiellement sous forme électrique

Bilan énergétique : solénoïde en régime lentement variable

On considère un solénoïde infini parcouru par un courant :

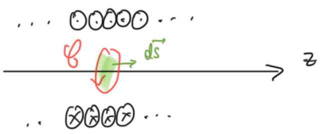
$$i(t) = i_o \cos(\omega t)$$

La longueur d'onde associée $\frac{2\pi c}{\omega}$ reste grande par rapport au rayon du solénoïde ce qui permet de rester dans l'ARQS. On admet que l'expression du champ $\vec{B}$ est alors inchangée par rapport à la situation vue en magnétostatique :

$$\vec{B}(t) = B(t)\vec{u}_z$$

avec $B(t)$ uniforme dans le solénoïde et nul en dehors.

1. Justifier l'existence d'un champ électrique à l'intérieur du solénoïde et déterminer son expression. On admettra que le champ électrique s'écrit sous la forme : $\vec{E}(M,t) = E(r,t)\vec{u}_\theta$.
2. Comparer les énergies volumiques électriques et magnétiques. Conclusion.



1) $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\vec{B} = B(t)\vec{u}_z \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$, il existe donc un champ $\vec{E}$ dans le solénoïde

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} \underset{\text{Stokes}}{=} \iint_{\mathcal{S}} (\vec{rot}\,\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} -(\vec{rot}\,\vec{B})\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow 2\pi r E = -B'(t)\pi r^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{E = -\frac{B'(t)\, r}{2}}$$

2) $$\frac{\frac{B^2}{2\mu_0}}{\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{B^2}{\frac{B'^2 r^2}{4}} \sim \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{B^2}{\omega^2 B^2 r^2} = \frac{c^2}{\omega^2 r^2}$$

$B' \sim \omega B$ pour B sinusoïdal

$$\frac{2\pi c}{\omega} = \lambda \Rightarrow \frac{\frac{B^2}{2\mu_0}}{\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}} \sim \frac{\lambda^2}{r^2} \gg 1$$

$\Rightarrow$ Dans le solénoïde, l'énergie est essentiellement sous forme magnétique.

Rq : ARQS $\tau \ll T$ (temps de propagation petit devant la période du signal)

$$\Rightarrow \underbrace{c\tau}_{\text{taille du circuit}} \ll \underbrace{cT}_{\lambda \text{ longueur d'onde}}$$