Électromagnétisme
Chapitre 6 - Équations de Maxwell

On se place dans le cas où la densité volumique de charges $\rho(M,t)$ et la densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$ ne sont plus constantes au cours du temps.
Ce sont alors les sources d'un champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ défini par son action sur une charge ponctuelle :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$ Force de LORENTZ

Les équations de Maxwell sont des équations **locales** qui font le lien entre $\vec{j}(M,t), \rho(M,t), \vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.
Rq : le principe de Curie est toujours valable, les conséquences présentent au moins les mêmes symétries que les causes.

I. Équations de Maxwell [1]

Milieu considéré : vide en dehors des sources. On considèrera dans les chapitres suivants les cas du plasma (gaz dilué) et des matériaux conducteurs.

1. Équations de Maxwell en régime variable

Maxwell Gauss $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ Maxwell Thomson (ou Maxwell flux)

Maxwell Faraday $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ Maxwell Ampère

Commentaires :

— Ce sont des équations **linéaires** : théorème de superposition.
— (M.G.) et (M.A.) lient les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ aux sources.
— (M.F.) et (M.A.) montrent un couplage entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$: on parle de champ **électromagnétique** en régime variable.
— (M.A.) fait apparaître le terme :

$$\left[\varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \right] = [j]$$

On appelle courant de déplacement :

$$\vec{j}_D = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1. proposées par James Mawxell en 1861.

2. Lien avec nos connaissances

— La divergence d'un rotationnel est nulle :

$$\mathrm{div}\,(\text{M.A}) \Rightarrow \qquad \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\right) = \mathrm{div}\left(\mu_o\left(\vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\right)$$

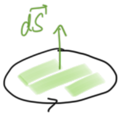
$$\Rightarrow \mathrm{div}\vec{j} + \underbrace{\mathrm{div}\left(\varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}_{\text{commutent}} = 0 \qquad \text{commutent car } \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$$

Soit, en utilisant l'équation de Maxwell Gauss :

$$\varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right) = \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_o}\right) \Rightarrow \qquad \mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

On retrouve **l'équation locale de conservation de la charge**.

— Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday :



$\mathscr{C}$: circuit rigide et fixe

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathscr{S}} (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E})\cdot d\vec{S} \quad (\text{Stokes}) \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathscr{S}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

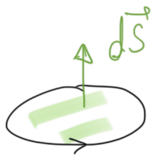
commutent car le circuit est fixe et rigide

$$\Rightarrow \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{\mathscr{S}} \vec{B}\cdot d\vec{S}\right)$$

en statique $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ et $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ (loi des mailles)

"tout se passe comme si on avait ajouté un générateur de fem $e = -\frac{d\phi}{dt}$" Loi de FARADAY

— Théorème d'Ampère généralisé : si on introduit le courant de déplacement $\vec{j}_D$ on peut utiliser un théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique créé par un champ électrique variable.



$\mathscr{C}$ contour fermé orienté

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathscr{S}} (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B})\cdot d\vec{S} \quad (\text{Stokes})$$

$$= \mu_o \underbrace{\iint_{\mathscr{S}} \vec{j}\cdot d\vec{S}}_{I_{\text{enlacé}}} + \mu_o \underbrace{\iint_{\mathscr{S}} \vec{j}_D\cdot d\vec{S}}_{\text{terme supplémentaire qui se calcule de la même façon.}}$$

II. Des équations de Maxwell aux équations de propagation

Idée : un champ E variable crée un champ B variable qui crée un champ E ...

1. Équations de propagation

On se place dans une zone vide de charges : $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$. On utilise la relation :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \vec{\Delta}\vec{A}$$

On applique l'opérateur rotationnel à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \vec{\Delta}\vec{E} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

On a d'autre part :

$$\text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Et on peut inverser les dérivées :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})\right)$$

Soit, finalement :

$$-\vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Que l'on écrit sous la forme :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On rappelle l'expression du laplacien de $\vec{E}$ en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \underbrace{\Delta E_x}\,\vec{u_x} + \Delta E_y\,\vec{u_y} + \Delta E_z\,\vec{u_z}$$

$$\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

$\Rightarrow$ Pour calculer $\vec{\Delta}\vec{E}$ il faut calculer 9 dérivées secondes !

↳ l'étude des symétries et invariances permet de simplifier le calcul.

En posant :

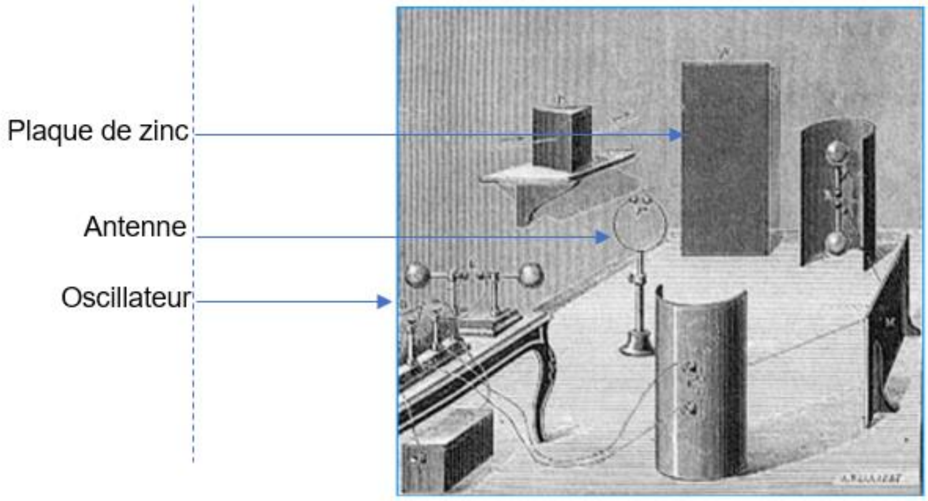
$$\varepsilon_o \mu_o = \frac{1}{c^2}$$ avec $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$ célérité de la lumière

Il s'agit d'une équation de propagation appelée **équation de d'Alembert**.
Les expériences de Heinrich Hertz (1885) ont mis en évidence la production, la propagation et la réception d'ondes électromagnétiques et ont ainsi permis une validation expérimentale des équations de Maxwell.

Rq : $[\vec{\Delta}\vec{E}] = \frac{[E]}{m^2}$ $\quad \left[\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\right] = \frac{[E]}{t^2}$ $\Rightarrow [c^2] = \frac{m^2}{t^2}$

↳ c a bien la dimension d'une vitesse.

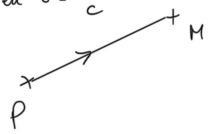
En 1888, Hertz proposa un dispositif permettant de démontrer le caractère ondulatoire des phénomènes électromagnétiques en utilisant un oscillateur (à l'origine de l'émission d'une onde électromagnétique supposée quasi-sinusoïdale et de fréquence $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$), une antenne de réception et des plaques de zinc (cf. document 11).



Document 11 – D'après « Construction de la preuve en physique » de Dominique Pestre

FIGURE 1 – Expérience de Hertz décrite dans le sujet du CAPES de Physique-Chimie 2020.

L'onde parcourt PM en $\tau = \frac{PM}{c}$



2. ARQS

Lorsque les sources $(\rho(P,t), \vec{j}(P,t))$ du champ électromagnétique varient, l'effet en un point M se fait ressentir avec un décalage :

$$\tau = \frac{PM}{c}$$

qui correspond au temps de propagation de l'information "la source a changé". L'approximation des régimes quasistationnaires consiste à négliger ce temps de propagation devant un temps caractéristique d'évolution du champ électromagnétique :

$$\tau \ll T$$

Rq : on a alors $\underbrace{c\tau}_{L \text{ dimension du circuit}} \ll \underbrace{cT}_{\lambda \text{ longueur d'onde}}$

$\Rightarrow$ $L \ll \lambda$ dans l'ARQS

Dans l'ARQS, le courant de déplacement est considéré comme négligeable devant le vecteur densité de courant $\vec{j}$. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

le cours sur l'induction a lieu dans le cadre de l'ARQS

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \underbrace{\left(+\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}$$

$\vec{B}$ se calcule comme en statique dans l'ARQS

⚠ les exercices demandent parfois de justifier que ce terme est négligeable

III. Aspects énergétiques

1. Puissance cédée à la matière

Considérons un matériau conducteur : les porteurs de charges sont mis en mouvement sous l'effet du champ électrique $\vec{E}$ et acquièrent ainsi une vitesse d'ensemble $\vec{v}$. La puissance de la force électrostatique s'exerçant sur un porteur de charge q s'écrit :

$$\mathcal{P} = q\vec{E}.\vec{v}$$

On considère à présent un volume $d\tau$ de conducteur. Sa charge totale se déplaçant à $\vec{v}$:

$$dq_m = \rho_m d\tau$$

La puissance reçue par un volume $d\tau$ de conducteur s'écrit ainsi :

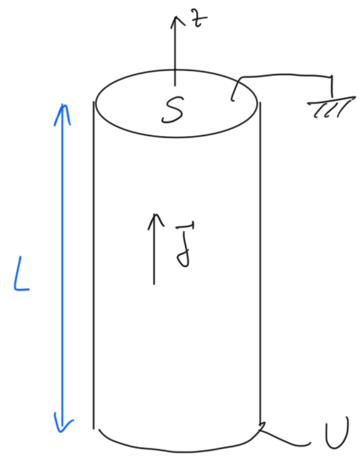
$$d\mathcal{P} = \rho_m \, d\tau\vec{E}.\vec{v}$$

$$\Rightarrow d\mathcal{P} = \vec{j}.\vec{E}d\tau$$

La **puissance volumique** cédée par l'onde électromagnétique à un matériau conducteur parcouru par le vecteur densité de courant $\vec{j}$ s'écrit :

$$\mathcal{P}_v = \vec{j}.\vec{E} \qquad \text{en } W.m^{-3}$$

Application : cylindre conducteur



$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \Rightarrow \mathcal{P}_v = \vec{j}.\vec{E} = \gamma E^2$$

$\vec{j}$ uniforme $\Rightarrow$ E uniforme $\quad \vec{E} = \frac{U}{L}\vec{u}_z$

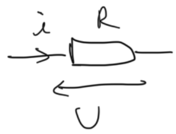
$$\Rightarrow \mathcal{P}_v = \frac{\gamma U^2}{L^2}$$

On intègre sur le volume du cylindre pour obtenir la puissance Joule dissipée par le cylindre :

$$\mathcal{P}_{Joule} = \frac{\gamma U^2}{L^2}.LS$$

$$\longrightarrow \mathcal{P}_{Joule} = \frac{\gamma S}{L}U^2$$

Rq :



$\mathcal{P}_{Joule} = Ui$ et $i = \frac{U}{R} \Rightarrow \mathcal{P}_{Joule} = \frac{U^2}{R}$

↳ on retrouve bien l'expression de $\boxed{R = \frac{L}{\gamma S}}$

2. Bilan énergétique

Bilan :

— On introduit la densité volumique en énergie électromagnétique :

$$u = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_o} \quad \text{en J.m}^{-3}$$

— Le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o} \quad \text{en W.m}^{-2}$$

$\vec{\Pi}.d\vec{S}$ représente la puissance traversant la surface dS. *En optique, les rayons lumineux sont des lignes de champ du vecteur de Poynting.*
$||\vec{\Pi}||$ *est de l'ordre de 900* W.m^{-2} *pour le rayonnement solaire en été.*

$\vec{\Pi}.\vec{dS}$ = puissance électromagnétique traversant $\vec{dS}$

3. Équation de Poynting

On peut alors écrire l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique, appelée **équation de Poynting** :

$$\mathrm{div}(\vec{\pi}) + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{j}.\vec{E}$$

→ Cette relation est analogue à l'équation locale de conservation de la charge :

ρ densité volumique de charge ⟷ u densité volumique en énergie électromagnétique

$\vec{j}.\vec{dS}\,dt$: charge traversant $\vec{dS}$ pendant dt ⟷ $\vec{\Pi}.\vec{dS}\,dt$: énergie électromagnétique traversant $\vec{dS}$ pendant dt

⇒ énergie EM dans $\mathcal{D}$ à $t+dt$ = énergie EM dans $\mathcal{D}$ à t − énergie sortie à travers $\mathcal{S}$ pendant dt − énergie absorbée par la matière dans $\mathcal{D}$ pendant dt

$$\iiint_{\mathcal{D}} u(t+dt,M)\,d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} u(t,M)\,d\tau - \oiint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi}.\vec{dS}\,dt - \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j}.\vec{E}\,d\tau\,dt$$

Quelques dates importantes :

— Champ électrostatique - 1785 : travaux de Coulomb, introduction du potentiel par Poisson en 1811

— Magnétostatique : Gauss mesure le champ magnétique terrestre en 1832, travaux de Biot et Savart, Ampère en 1830.

— 1831 : Faraday étudie l'influence d'un champ magnétique variable sur un circuit.

— 1872 : mise en forme des équations de Maxwell caractérisant le champ électromagnétique.

— 1888 : expériences de Hertz : mise en évidence d'ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière : fondement expérimental à la théorie de Maxwell.

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont d'abord étudiés séparément.