**Convection naturelle**

Montrer que la masse volumique d'un gaz diminue lorsque la température augmente.

On assimile le gaz à un GP, on a donc $PV = nRT$ (équation d'état)

Soit $M$ la masse molaire du gaz : $\rho = \frac{m}{V}$ avec $m = nM$

$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{nM}{V} \\ \frac{n}{V} = \frac{P}{RT} \end{cases}$ soit $\boxed{\rho = \frac{MP}{RT}}$ $\Rightarrow$ on vérifie bien avec ce modèle que la masse volumique $\rho$ diminue avec la température

**Construction d'un calorimètre**

Un calorimètre est un dispositif permettant de réaliser des transformations de façon adiabatique.

Faire le lien entre la description du calorimètre dans le document ci-dessous extrait du catalogue Jeulin et les différents modes de transferts thermiques.

# 1 Description

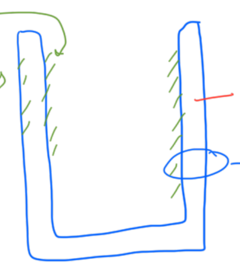
Le calorimètre est constitué d'un vase en verre double paroi brillantée sous vide d'air, recouvert d'une enveloppe extérieure en plastique, d'un vase de protection intérieure en plastique et d'un couvercle de fermeture.

Le couvercle du calorimètre est composé des éléments suivants :

- 1 agitateur en plastique guidé, à section rectangulaire, imperdable,
- 1 passage ∅ 11 mm pour un thermomètre ou une sonde,
- 1 guide ∅ 6 mm pour un thermomètre à dilatation ou une sonde thermique,
- 1 ouverture centrale circulaire obturable par un couvercle pour l'introduction des résistances,
- 2 résistances 2 et 4 Ω montées en série sur tiges aluminium gainées, reliées à un couvercle isolant à douilles de sécurité ∅ 4mm.

limitation des pertes par le couvercle (trous adaptés aux ustensiles)

parois brillantées pour limiter les échanges par rayonnement



sous vide ⇒ permet de limiter la convection

|| vide || verre verre } ~ analogue à un double vitrage ⇒ limite la conduction

**Premier principe pour différentes géométries**

Appliquer le premier principe de la thermodynamique pour une évolution des systèmes suivants entre $t$ et $t+dt$ (on considèrera qu'il n'y a pas de source de chaleur et que $\delta W = 0$).

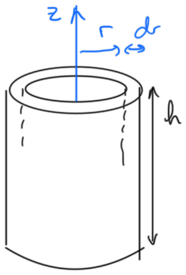
— En géométrie cylindrique avec $T(M,t) = T(r,t)$, $\vec{j}_{th} = j_{th}(r,t)\vec{u}_r$, système compris entre les cylindres de rayons $r$ et $r+dr$ de même hauteur $h$.

— En géométrie sphérique avec $T(M,t) = T(r,t)$, $\vec{j}_{th} = j_{th}(r,t)\vec{u}_r$, système compris entre les sphères de rayons $r$ et $r+dr$.

— En géométrie quelconque, on considère un système $\mathcal{D}$ de surface extérieure $\mathcal{S}$, montrer que :

$$\rho\, c\, \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}(\vec{j}_{th})$$

1)




Volume de $\Sigma$ : $\pi(r+dr)^2 h - \pi r^2 h \simeq 2\pi r\, dr\, h$

$\Rightarrow dU = \rho c\, 2\pi r\, dr\, h \left(T(r,t+dt) - T(r,t)\right)$

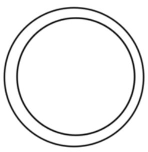
$\simeq \rho c\, 2\pi r\, dr\, h \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$

1er principe appliqué à $\Sigma$ entre $t$ et $t+dt$ : $dU = \delta Q$

$$\Rightarrow \rho c\, 2\pi r\, dr\, h \frac{\partial T}{\partial t} dt = \underbrace{j_{th}(r,t)\, 2\pi r\, h\, dt - j_{th}(r+dr,t)\, 2\pi(r+dr)\, h\, dt}_{-2\pi h \frac{\partial}{\partial r}(r j_{th})\, dr\, dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r j_{th})}$$

2)



Volume de $\Sigma$ : $\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \simeq 4\pi r^2 dr$

$\Rightarrow dU \simeq 4\pi r^2 dr\, \rho c \left(T(r,t+dt) - T(r,t)\right)$

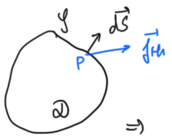
$= 4\pi r^2 dr\, \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$

1er principe appliqué à $\Sigma$ entre $t$ et $t+dt$ :

$$4\pi r^2 dr\, \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt = \underbrace{j_{th}(r,t)\, 4\pi r^2 dt - j_{th}(r+dr,t)\, 4\pi (r+dr)^2 dt}_{-4\pi \frac{\partial}{\partial r}(r^2 j_{th})\, dr\, dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 j_{th})}$$

3)




$dU = \delta Q$

$$\Rightarrow \iiint_{M\in\mathcal{D}} \rho c \left(T(M,t+dt) - T(M,t)\right) d\tau = -\oiint_{P\in\mathcal{S}} \vec{j}_{th}(P,t)\cdot\vec{dS}\, dt$$

Green - Ostrogradski

$$\Rightarrow \iiint_{M\in\mathcal{D}} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau\, dt = -\iiint_{M\in\mathcal{D}} \mathrm{div}\, \vec{j}_{th}\, d\tau\, dt$$

$$\Rightarrow \iiint_{M\in\mathcal{D}} \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{j}_{th}\right) d\tau\, dt = 0$$

Ce résultat est valable pour tout système $\mathcal{D}$, on a donc :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{j}_{th} = 0}$$

## Caractère irréversible de l'équation de la chaleur.

On suppose que la fonction $T_1(x,t)$ est solution de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Montrer que $T_2(x,t) = T_1(x,-t)$ ne peut pas être solution de cette équation.
Reprendre ce raisonnement pour $E_1(x,t)$ solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Que peut-on dire cette fois de $E_2(x,t) = E_1(x,-t)$ ?

* On a $\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(T_1(x,-t)\right) = -\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t}$

$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(T_1(x,-t)\right) = \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}$

$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial t} = -a\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}$

$T_2$ n'est pas solution de l'équation de diffusion

* On a $\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(E_2(x,t)\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_1}{\partial t}(x,-t)\right) = \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2}$

$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2}$

Si $\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2}$ alors $\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} \Rightarrow E_2$ est solution de l'équation de propagation

$\Rightarrow$ Les phénomènes diffusifs sont irréversibles (goutte d'encre qui s'étale)
Une onde peut se propager dans un sens ou dans l'autre : c'est un phénomène réversible.

## Équation de diffusion et ordres de grandeur

On a trempé une cuillère métallique dans de l'eau chaude, quel est le temps caractéristique d'évolution $\tau$ de la température au bout de la cuillère de longueur $L$ ?
On donne le coefficient de diffusion pour le métal constituant la cuillère :

$$a = 10^{-5}\text{m}^2.\text{s}^{-1}$$

Proposer une valeur numérique pour $\tau$.

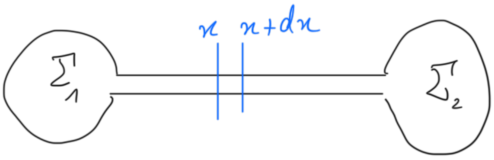
On part de l'équation de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{\tau} \sim \frac{a}{L^2} \Rightarrow \boxed{\tau \sim \frac{L^2}{a}}$

A.N : pour $L = 5$ cm, on obtient $\tau = \frac{(5.10^{-2})^2}{10^{-5}} = 250$ s ($\sim 4$ minutes)

## Bilan entropique

Deux corps $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ de même capacité thermique $C$ sont reliés par une tige de section $s$, de longueur $L$, de capacité thermique négligeable et de conductivité thermique $\lambda$. On suppose que les contacts entre la tige et les deux corps sont parfaits et que le système est calorifugé.
À l'instant initial, $S_1$ et $S_2$ sont aux températures respectives $T_{1o}$ et $T_{2o} < T_{1o}$. On note $T_1(t)$ et $T_2(t)$ les températures de $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ à un instant $t$ quelconque.

1. Montrer que $\Phi(x,t)$ flux thermique à travers la section $s$ en $x$ à $t$ ne dépend pas de $x$. En déduire que la résistance thermique définie par :
$$R_{th} = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{\Phi}$$
ne dépend pas du temps et préciser son expression.
2. Déterminer $T_1(t)$ et $T_2(t)$ en appliquant le premier principe aux systèmes $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ et en utilisant $R_{Th}$. Commenter les valeurs finales de $T_1$ et $T_2$.
3. En déduire la variation d'entropie du système $\{\Sigma_1,\ \Sigma_1,\ \text{tige}\}$ entre l'état initial et l'état d'équilibre final. $\Delta S = C \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + C \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right) = C \ln\left(\frac{T_f^2}{T_1 T_2}\right)$
4. En étudiant un élément de tige de longueur $dx$, montrer que l'entropie créée par unité de volume et de temps s'écrit :
$$\dot{s}_{cr,v} = \frac{\lambda}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2$$




1) On applique le 1er principe de la thermodynamique au système compris entre $x$ et $x+dx$ entre $t$ et $t+dt$ :

$$s\,dx\,\rho c\big(T(t+dt,x) - T(t,x)\big) = \underbrace{\big(\phi(x,t) - \phi(x+dx,t)\big)\,dt}_{-\frac{d\phi}{dx}\,dx\,dt = 0}$$

négligeable d'après l'énoncé $\Rightarrow -\frac{d\phi}{dx}\,dx\,dt = 0$

$\hookrightarrow \phi$ ne dépend pas de $x$

$\phi = j_{th}\, s = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} s$ indépendant de $x$

$\hookrightarrow -\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\phi}{\lambda s}$ indépendant de $x$ $\xrightarrow{\text{on intègre}}$ $\frac{T_1(t) - T_2(t)}{L} = \frac{\phi}{\lambda s} \Rightarrow \boxed{R_{Th} = \frac{L}{\lambda s}}$

2) $\Sigma_1 : \left\{ C\,dT_1 = -\phi\,dt \right.$ avec $\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{Th}}$
$\Sigma_2 : \left\{ C\,dT_2 = \phi\,dt \right.$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dT_1}{dt} = -\frac{1}{R_{Th} C}(T_1 - T_2) \\ \frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{R_{Th} C}(T_1 - T_2) \end{array}\right.$$

On pose $\left\{\begin{array}{l} u = T_1 + T_2 \\ v = T_1 - T_2 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \frac{du}{dt} = 0 \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{2}{R_{Th} C} v \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} T_1 + T_2 = T_{10} + T_{20} \\ T_1 - T_2 = (T_{10} - T_{20})\, e^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{R_{Th} C}{2} \end{array}}$

4) $dS = \delta S_c + \delta S_{ech}$ et $dS = \rho\, s\,dx\, c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = 0$ car $c$ négligeable

$\Rightarrow \delta S_c = -\delta S_{ech} = -\left(\frac{\phi\,dt}{T(x,t)} - \frac{\phi\,dt}{T(x+dx,t)}\right)$ avec $\phi = j_{th}\, s = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} s$ indépendant de $x$

$= \phi\,dt\,dx \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T}\right)$

$= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \underbrace{s\,dx}_{\text{volume}}\, dt \left(-\frac{1}{T^2}\right) \frac{\partial T}{\partial x}$

On obtient bien $\boxed{\dot{S}_{ech} = \frac{\lambda}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2}$