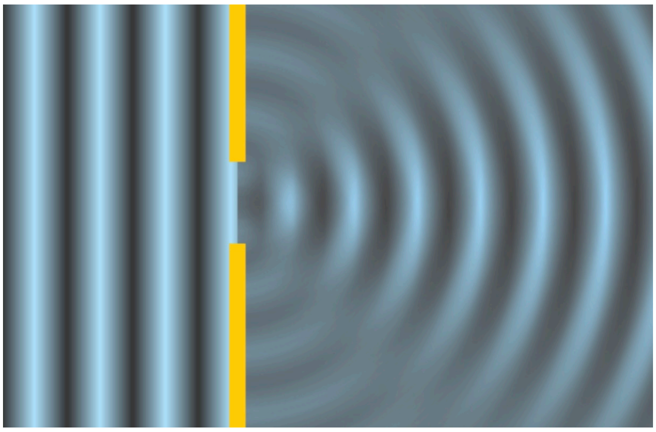
# Électromagnétisme
## Chapitre 7 - Ondes électromagnétiques dans le vide

La propagation de vagues à la surface de l'eau, de vibrations le long d'une corde sont des exemples de phénomènes faisant intervenir des ondes mécaniques. La matière constituant le milieu oscille autour de sa position d'équilibre lors du passage de l'onde.
Les ensembles de points oscillant en phase constituent des **surfaces d'ondes**. On parle d'**onde plane** lorsque ces surfaces sont des plans, d'**ondes sphériques** lorsqu'il s'agit de sphères ... La simulation ci-dessous illustre la déformation des surfaces d'ondes lors d'un phénomène de diffraction.



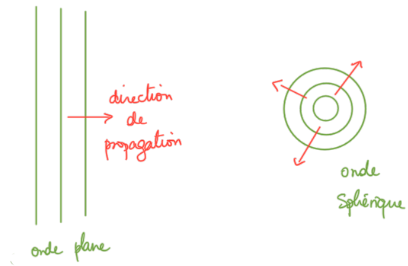
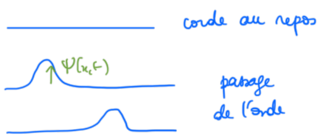



FIGURE 1 – Simulation - Expérience de la cuve à ondes - phyanim.sciences.univ-nantes.fr

On peut montrer que la déformation $\psi(x,t)$ d'une corde lors du passage d'une onde mécanique obéit à l'**équation de d'Alembert** :




$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

$v$ homogène à une vitesse

Nous avons vu dans le chapitre 6 que les équations de Maxwell dans le vide permettent d'établir des équations de propagation vérifiées par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ayant une structure similaire :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$

$c = 3.10^8\ m.s^{-1}$

Pour $\vec{E} = E(x,t)\,\vec{u_y}$

$\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\vec{u_y}$

$\Rightarrow E(x,t)$ solution de $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux ondes planes progressives qui constituent une famille de solutions de ces équations.

Remarque : les équations de Maxwell permettent d'établir les équations de propagation mais il n'y a pas équivalence (les équations de propagation ne font plus intervenir de couplage entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ notamment).
Il faudra toujours vérifier que les solutions des équations de propagation sont compatibles avec les équations de Maxwell.

# I. Ondes planes progressives

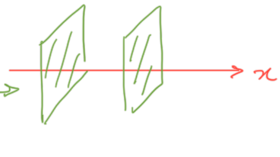
Une onde plane progressive est une onde de la forme :

$$f(\vec{r},t) = F(\vec{r}.\vec{u} - c\ t)$$

En physique, on note : $\vec{r} = \vec{OM} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y} + z\,\vec{u_z}$ en coord. cartésiennes

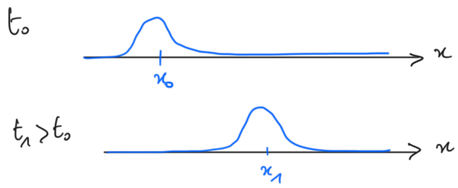
— Le vecteur $\vec{u}$ définit la direction de propagation de l'onde.
À un instant $t_o$ fixé $F(\vec{r}.\vec{u} - c\ t_o)$ prend la même valeur en tout point des plans perpendiculaires à $\vec{u}$. Par exemple pour $\vec{u} = \vec{u}_x$ :

$$F(\vec{r}.\vec{u} - c\ t) = F(x - c\ t)$$




Les plans $x = cte$ constituent alors les **surfaces d'onde**.

— Onde progressive signifie que l'on trouve la même forme un peu plus loin un peu plus tard :




F prend la même valeur en $x_0$ à $t_0$ et en $x_1$ à $t_1$ :

$\Rightarrow$ on a donc $x_0 - c\,t_0 = x_1 - c\,t_1$

Soit $\boxed{c = \dfrac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}}$ vitesse de propagation de l'OPP.

## 1. Structure de l'OPP

Dans ce qui suit, on se place dans le cas où $\vec{u} = \vec{u}_x$, on a alors :

$$\vec{E} = E_x(x - ct)\vec{u}_x + E_y(x - ct)\vec{u}_y + E_z(x - ct)\vec{u}_z$$

$$\vec{B} = B_x(x - ct)\vec{u}_x + B_y(x - ct)\vec{u}_y + B_z(x - ct)\vec{u}_z$$

Rappel : en coordonnées cartésienne $\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$

D'après l'équation de Maxwell Gauss :

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

Dans un problème d'ondes, les champs statiques (= les constantes d'intégration ici) ne nous intéressent pas, on a alors :

$$E_x = 0$$

Les ondes sonores sont des ondes longitudinales

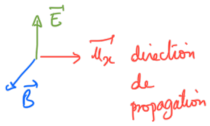
On dit que le champ électrique est **transverse**. On montre de la même façon que :

$$B_x = 0$$

$\vec{B}$ est également transverse

En exploitant l'équation de Maxwell Faraday, on établit la **relation de structure** vérifiée par l'OPP :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}}$$




$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont $\perp$ à $\vec{u_x}$

$\vec{B} = \dfrac{\vec{u_x} \wedge \vec{E}}{c}$

$\Rightarrow (\vec{u_x}, \vec{E}, \vec{B})$ = trièdre direct

et $\|\vec{B}\| = \dfrac{\|\vec{E}\|}{c}$

L'onde ainsi obtenue est compatible avec les équations de Maxwell.

Attention : ces relations ne fonctionnent pas si $\vec{E}$ est une somme d'OPP de directions de propagation $\vec{u}$ différentes ou bien si la propagation ne se fait pas dans le vide.

### 2. Aspects énergétiques

Comparons les deux termes de la densité volumique en énergie :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_o}$$

Relation de structure :
$\vec{B} = \frac{\vec{u_x} \wedge \vec{E}}{c}$
$\Rightarrow B^2 = \frac{E^2}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0 E^2$

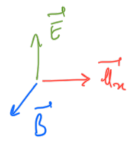
On a, d'après ce qui précède :

$$B^2 = \frac{E^2}{c^2} \Rightarrow \frac{B^2}{2\mu_o} = \varepsilon_o \cancel{\mu_o} \frac{E^2}{2\cancel{\mu_o}} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2}$$

On dit qu'il y a équipartition de l'énergie entre les formes électriques et magnétiques.

$$u_{em} = 2\frac{\varepsilon_o E^2}{2} = \varepsilon_o E^2$$

On peut également exprimer le vecteur de Poynting :

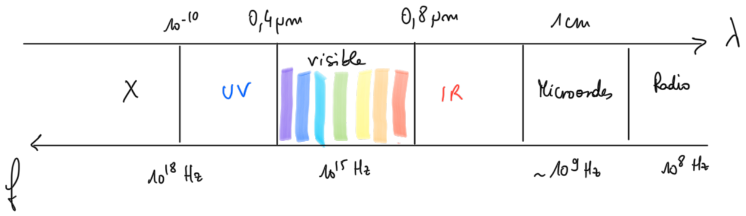



$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o} \Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_o\ c}\vec{u}_x$$

## II. Ondes progressives monochromatiques (OPPM)

Les OPP ne sont pas faciles à manipuler dans les calculs. On préfère utiliser une base des OPP constituée par les OPPM. Comme les équations de Maxwell sont linéaires, on sait que la somme d'OPPM solutions des équations de Maxwell sera solution des équations de Maxwell.

Onde
Plane : les surfaces d'onde sont des plans
Progressive : on retrouve la même forme un peu plus loin un peu plus tard
Monochromatique : une seule pulsation $\omega$.




### 1. Définition

On peut décomposer une OPP se propageant suivant $\vec{u}_x$ comme la somme d'OPPM se propageant suivant $\vec{u}_x$ :

$$F(x-ct) = \int_0^\infty \tilde{f}(\omega)\cos(\omega t - kx - \varphi)d\omega$$

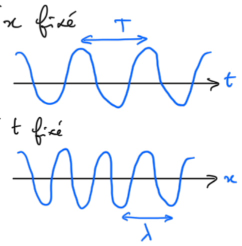
$\tilde{f}$ = transformée de Fourier de F
(il faudrait mettre $e^{i(\omega t - kx)}$ à la place du cosinus et sommer de $-\infty$ à $+\infty$)
↳ même résultat

Une OPPM est une onde de la forme :

$$E(x,t) = E_o\cos(\omega t - kx - \varphi)$$

À x fixé

À t fixé




— Elle fait apparaitre une double périodicité : spatiale (période $\lambda$) et temporelle (période $T$).

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\ ;\ \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

— $k$ désigne le vecteur d'onde, on a plus généralement :

$$E(\vec{r},t) = E_o\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} - \varphi)$$

$\vec{r} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y} + z\,\vec{u_z}$

La direction de $\vec{k}$ correspond à la direction de propagation. Sa norme est reliée à la longueur d'onde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- La pulsation $\omega$ est imposée par le phénomène physique oscillant à l'origine de l'OPPM : elle ne change pas au cours de la propagation (linéarité des milieux). Le vecteur d'onde peut par contre changer suivant le milieu considéré.
- L'OPPM est une OPP :

$$\omega t - kx = -k \underbrace{\left(x - \frac{\omega}{k} t\right)}_{x - ct}$$

Elle se propage à la **vitesse de phase** :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

on identifie $c = \frac{\omega}{k}$ vitesse de propagation

On peut vérifier que $E(x,t) = E_o \cos(\omega t - kx)$ est solution de l'équation de d'Alembert à condition d'avoir :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

soit $v_\varphi = c$

Il s'agit de la **relation de dispersion** : c'est la condition que doivent vérifier $\omega$ et $k$ pour que l'OPPM (qui est un outil mathématique) soit solution de l'équation de propagation décrivant le phénomène physique observé.

**2. Utilisation de la notation complexe**

On peut utiliser la notation complexe en écrivant :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_o \exp\Big(i(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\,)\Big)$$

On souligne $\underline{\vec{E}_o}$ ici car les différentes composantes de $\vec{E}$ ne sont pas toujours en phase (cf III)

Les différents calculs deviennent alors très simples (attention aux signes suivant la convention choisie) :

$e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$

$\text{div}\,\vec{E} = -i\vec{k}.\vec{E}$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -i\vec{k}\wedge\vec{E}$

$\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}$

$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}$

$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E}$

$e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$

$\text{div}\,\vec{E} = i\vec{k}.\vec{E}$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = i\vec{k}\wedge\vec{E}$

$\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}$

$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E}$

$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E}$

Applications : On choisit $\vec{E} = \vec{E_0} e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$, $\vec{B} = \vec{B_0} e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$

- Équations de Maxwell :

$\text{div}\,\vec{E} = 0 \Rightarrow -i\vec{k}.\vec{E} = 0$

$\text{div}\,\vec{B} = 0 \Rightarrow -i\vec{k}.\vec{B} = 0$

$\Big\}$ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses

$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k}\wedge\vec{E} = -i\omega\vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}}$

la relation de structure de l'onde se démontre très facilement

$\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k}\wedge\vec{B} = \frac{1}{c^2} i\omega\vec{E}$

$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{c^2}{\omega}\underbrace{\vec{k}\wedge\left(\frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}\right)}_{-\frac{k^2}{\omega}\vec{E}}$

On obtient $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

relation de dispersion.

- Équation de propagation :

$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow -k^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\left(-\omega^2\vec{E}\right) = \vec{0} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

Relation de dispersion

### 3. Aspects énergétiques

On prend par exemple :

$$\underline{\vec{E}} = E_o \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_y \ ; \ \underline{\vec{B}} = \frac{E_o}{c}\exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_z$$


$\vec B = \frac{\vec u_x \wedge \vec E}{c}$

Ce qui correspond aux champs réels :

$$\vec{E} = E_o \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y \ ; \ \vec{B} = \frac{E_o}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$$

La densité volumique en énergie électromagnétique :

$$u = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_o}$$

⚠ Lorsqu'on voit apparaître des termes en $e^{2i\omega t}$ dans les calculs c'est souvent signe d'erreur ...

comporte des termes en $E^2$ et $B^2$. **La notation complexe ne peut pas être utilisée pour calculer** $u$. En effet :

$$\mathrm{Re}(\underline{A}^2) \neq (\mathrm{Re}(\underline{A}))^2$$

Méthode : La notation complexe permet par contre d'évaluer des valeurs moyennes :

produit, produit scalaire, produit vectoriel

$$< A.B >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{A}.\underline{B}^*)$$

complexe conjugué

**Notation réelle**

$$u_{elec} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \Rightarrow u_{elec} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\cos^2(\omega t - kx)$$

$$\Rightarrow \langle u_{elec}\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \times \frac{1}{2}$$

$\langle \cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$

$$u_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow u_{mag} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t - kx)$$

$\langle \cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \langle u_{mag}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0}\varepsilon_0\mu_0 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$$ (équipartition de l'énergie)

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec E \wedge \vec B}{\mu_0} \Rightarrow \vec\Pi = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\,\vec u_x$$

$$\hookrightarrow \langle \vec\Pi \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec u_x$$

**Notation complexe**

$$\langle u_{elec}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\varepsilon_0 \frac{\underline{\vec E}.\underline{\vec E}^*}{2}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{4}\mathrm{Re}\left(\underbrace{E_0 e^{i(\omega t - kx)} . E_0 e^{-i(\omega t - kx)}}_{E_0^2}\right)$$

$$\hookrightarrow \langle u_{elec}\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$$

$$\langle u_{mag}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec B}.\underline{\vec B}^*}{2\mu_0}\right)$$

$$= \frac{1}{4\mu_0}\mathrm{Re}\left(\underbrace{\frac{E_0}{c}e^{i(\omega t - kx)} . \frac{E_0}{c}e^{-i(\omega t - kx)}}_{\frac{E_0^2}{c^2}}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$$

$$\langle \vec\Pi \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec E}\wedge\underline{\vec B}^*}{\mu_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\underbrace{E_0 e^{i(\omega t - kx)}\vec u_y \wedge \frac{E_0}{c}e^{-i(\omega t - kx)}\vec u_z}_{\frac{E_0^2}{c}\vec u_x}\right)$$

$$\hookrightarrow \langle \vec\Pi \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec u_x$$

## III. Polarisation des ondes électromagnétiques

On considère une OPPM se propageant suivant $\vec{u}_z$ :

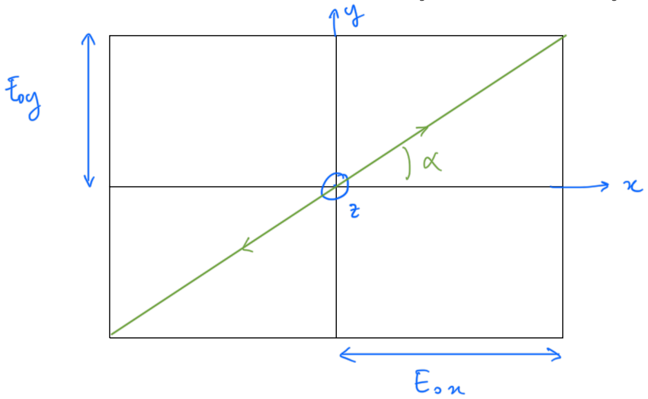
$$\vec{E} = E_{ox}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_{oy}\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{u}_y$$

Définition : donner la polarisation de cette onde, c'est étudier la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ dans un plan orienté de sorte que l'observateur voie arriver l'onde vers lui. Si cette courbe est une droite, on parle de polarisation **rectiligne**, si c'est un cercle de polarisation **circulaire** et si c'est une ellipse de polarisation **elliptique**.
La lumière naturelle est non polarisée.

### 1. Polarisation rectiligne

- $E_{ox} = 0$ : polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_y$ ou $E_{oy} = 0$ : polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$
- $\varphi = 0$ ou $\pi$.

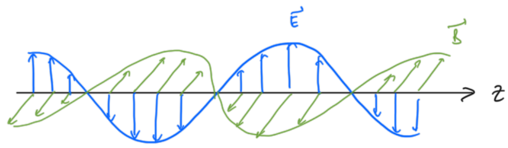
$$\vec{E} = E_{ox}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_{oy}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_y$$




On se place dans le plan $z=0$, l'onde venant vers nous.
On a :
$E_x = E_{ox}\cos(\omega t)$
$E_y = E_{oy}\cos(\omega t)$
$\Rightarrow E_y = \dfrac{E_{oy}}{E_{ox}} E_x$

$\tan\alpha = \dfrac{E_{oy}}{E_{ox}}$

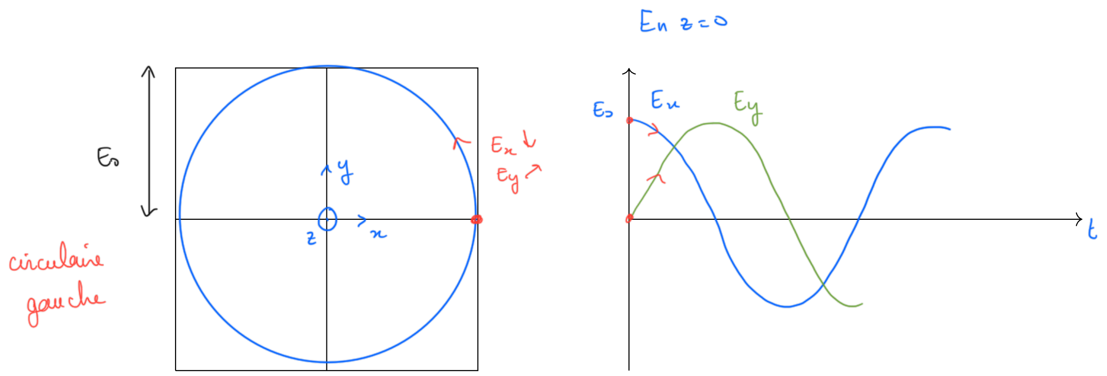
Dans le cas d'une onde polarisée rectilignement, on peut représenter l'onde à t fixé :



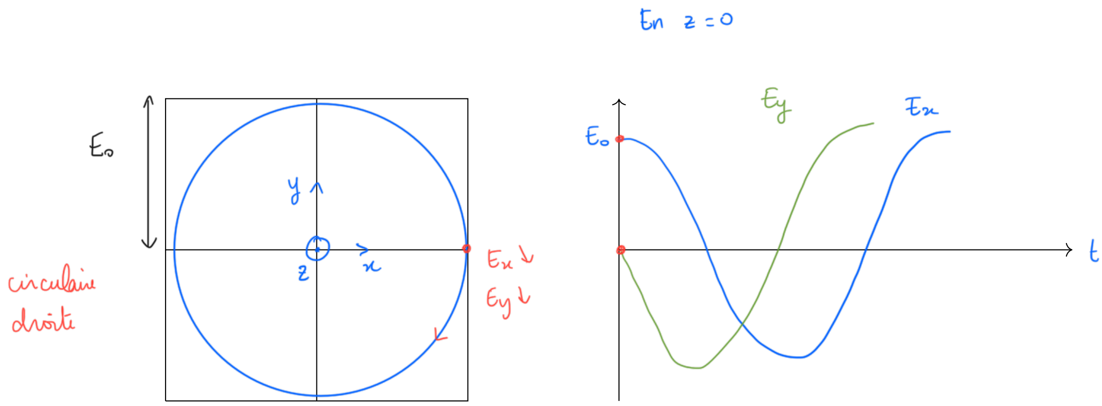
### 2. Polarisation circulaire

Pour obtenir une polarisation circulaire, il faut choisir :
- $E_{ox} = E_{oy} = E_o$ ;
- $\varphi = \pm\pi/2$

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_0 \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$




$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_y = -E_0 \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$




On a alors : $\underbrace{< E_x^2 > = < E_y^2 >}$.

$\rightarrow$ comme pour la lumière naturelle non polarisée