Propagation le long d'une corde

On considère une corde de masse linéïque λ, confondue au repos avec l'axe (Ox) horizontal. Elle est infiniment souple : la tension $\vec{T}(x_o)$ qui représente la force exercée par la portion de corde $x > x_o$ sur la portion de corde $x < x_o$ est colinéaire à la corde. On néglige les effets de la pesanteur. On note $\psi(x,t)$ le déplacement de la corde à l'abscisse x lors du passage de la vibration. On se place dans le cas des petites déformations.
On note $\alpha(x_o,t)$ l'angle entre $\vec{u}_x$ et $\vec{T}(x_o,t)$, $\alpha \ll 1$.

1. On considère un élément de corde compris entre les abscisses x et $x+dx$ au repos. Montrer que sa longueur $d\ell$ ne varie pas lors du passage de l'onde mécanique et que l'on a :

$$d\ell \simeq dx$$

2. Appliquer le PFD à cet élément de corde. En déduire les équations suivantes :

$$0 = T(x+dx)\cos(\alpha(x+dx,t)) - T(x)\cos(\alpha(x,t))$$

$$\lambda dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T(x+dx,t)\sin(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)\sin(\alpha(x,t))$$

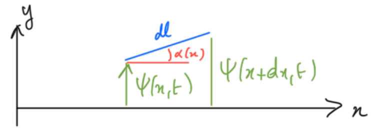
3. Justifier que dans le cas des petites déformations, on a alors :

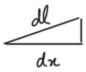
$$T(x) = T_o$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

avec v une constante homogène à une vitesse à exprimer en fonction de T_o et μ.

1)



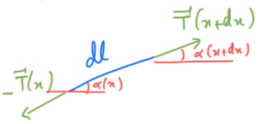


$\psi(x+dx,t) - \psi(x,t)$ $\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{dl} \\ \sin\alpha = \dfrac{\psi(x+dx,t)-\psi(x,t)}{dl} \end{cases}$

Dans le cadre des petites déformations $\alpha \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha \simeq 1 \\ \sin\alpha \simeq \alpha \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} dx \simeq dl \\ \alpha \simeq \dfrac{\psi(x+dx,t)-\psi(x,t)}{dx} = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$

2)



On applique le PFD à l'élément dl dans $\mathcal{R}$ galiléen :

$\underbrace{dm}\ \vec{a} = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x)$

masse de dl : $dm = \lambda\, dl \simeq \lambda\, dx$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = T(x+dx)\cos(\alpha(x+dx,t)) - T(x)\cos(\alpha(x,t)) & (1) \\ \lambda\, dx \dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T(x+dx)\sin(\alpha(x+dx,t)) - T(x)\sin(\alpha(x,t)) & (2) \end{cases}$

3) Dans le cadre des petites déformations $\cos\alpha \simeq 1$ et $\sin\alpha \simeq \alpha$

(1) $\Rightarrow T(x+dx) - T(x) = 0$ soit $\dfrac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow T(x) = T_o$ constante

On a alors (2) $\Rightarrow \lambda\, dx \dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T_o\left(\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)\right)$

soit $\lambda \dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T_o \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}$

On a écrit d'autre part $\alpha = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ et on a finalement

$\boxed{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \dfrac{T_o}{\lambda}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$ $\Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{T_o}{\mu}}$ vitesse de propagation de la vibration le long de la corde

OPP solution de l'équation de d'Alembert

Soit un champ électrique $E(x,t) = F(x-ct)$ avec F une fonction quelconque dérivable deux fois. On a :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = F'(x-ct) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = F''(x-ct)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c\,F'(x-ct) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -c\,\frac{\partial F'(x-ct)}{\partial t} = c^2\,F''(x-ct)$$

F' est la dérivée de F

F'' est la dérivée seconde de F

Vérifier que $E(x,t)$ est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\underbrace{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}}_{F''(x-ct)} - \frac{1}{c^2}\underbrace{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}_{c^2 F''(x-ct)} = 0$$

$\Rightarrow$ $E(x,t) = F(x-ct)$ est bien solution de l'équation de d'Alembert, quelle que soit la fonction F.

Une résolution de l'équation de d'Alembert

On pose $u = x - ct$ et $v = x + ct$. On a alors :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial E}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{-c} + \frac{\partial E}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{c} = c\left(-\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\right)$$

Montrer que ce changement de variable permet d'écrire l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} = 0$$

On a alors :

$$E(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 E}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 E}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\frac{\partial E}{\partial u} + c\frac{\partial E}{\partial v}\right)$$

$$= -c\left(\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{-c} + \frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{c}\right) + c\left(\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{-c} + \frac{\partial^2 E}{\partial v^2}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{c}\right)$$

$$= c^2\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} - c^2\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} - c^2\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} + c^2\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}$$

On a alors $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{c^2}\left(c^2\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} + c^2\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 4\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} = 0$$

On intègre l'équation $\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} = 0$ par rapport à u (à v constant)

on a intégré à v constant

$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial v} = g(v)$ (la constante d'intégration est une fonction de v car

On intègre ensuite ce résultat par rapport à v à u constant :

$$E = \underbrace{G(v)}_{\text{primitive de } g(v)} + \underbrace{F(u)}_{\text{constante d'intégration}}$$

Relation de structure dans le cas d'une onde plane progressive

On se place dans le cas où :

$$\vec{E} = E_y(x-ct)\vec{u}_y + E_z(x-ct)\vec{u}_z$$

$$\vec{B} = B_y(x-ct)\vec{u}_y + B_z(x-ct)\vec{u}_z$$

Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday permet d'écrire :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ E_y(x-ct)\\ E_z(x-ct)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -E_z'(x-ct)\\ E_y'(x-ct)\end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c\,B_y'(x-ct)\,\vec{u}_y - c\,B_z'(x-ct)\,\vec{u}_z$$

On a donc $\begin{cases} B_y' = -\frac{1}{c}E_z' \Rightarrow B_y = -\frac{E_z}{c} \\ B_z' = \frac{1}{c}E_y' \Rightarrow B_z = \frac{E_y}{c} \end{cases}$

Pas de champs statiques car on étudie des ondes

On a bien $\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$

Relation de dispersion

On considère une OPPM $E(x,t) = E_o\cos(\omega t - kx)$.
À quelle condition sur ω et k est-elle solution de l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$\frac{\partial E}{\partial x} = -(-k)E_0\sin(\omega t - kx)$

$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k \times k\,E_0\cos(\omega t - kx)$

$\frac{\partial E}{\partial t} = -\omega E_0\sin(\omega t - kx)$

$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0\cos(\omega t - kx)$

$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_0\cos(\omega t - kx)$

$\Rightarrow E(x,t)$ est solution de l'équation de d'Alembert à condition d'avoir $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ (relation de dispersion)

Flux de photons

Dans le chapitre 6, on a fait une analogie entre le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et le vecteur densité de courant $\vec{j}$. On peut utiliser cette analogie pour interpréter l'OPPM comme un flux de photons d'énergie $\hbar\omega$ se propageant à la vitesse c. Pour une onde se propageant suivant $\vec{u}_z$ et en notant n le nombre de photons par unité de volume, on peut écrire :

$$\vec{j} = \rho_m\,\vec{v} \leftrightarrow \vec{\Pi} = n\hbar\omega\;c\vec{u}_z$$

1. Déterminer $< u >$ pour une OPPM polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$, se propageant suivant $\vec{u}_z$.
2. Déterminer également l'expression du vecteur de Poynting moyen $< \vec{\Pi} >$ pour cette onde.
3. En déduire le nombre de photons par unité de volume n dans le cas d'un laser He-Ne de puissance 10^3W.m^{-2} ($\lambda = 632{,}8$ nm)

1) On considère $\vec{E} = E_0\,e^{i(\omega t - kz)}\,\vec{u}_x$, $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c}\,e^{i(\omega t - kz)}\,\vec{u}_y$

$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}^*}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{B}^*}{2\mu_0}\right) \Rightarrow \langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$

2) $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}^*}{\mu_0}\right) \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\mu_0 c\,\varepsilon_0}\vec{u}_z = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\,c\,\vec{u}_z \Rightarrow$ on observe $\langle \vec{\Pi} \rangle = \overbrace{\langle u \rangle}^{\text{analogue à } \rho_m}\,c\,\vec{u}_z$

3) $n\hbar\omega = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\|\langle\vec{\Pi}\rangle\|}{c} \Rightarrow n = \frac{\|\langle\vec{\Pi}\rangle\|}{c\hbar\omega} = \frac{\lambda\|\langle\vec{\Pi}\rangle\|}{hc^2}$

$\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$

A.N : $n = \frac{6\cdot10^{-7}\times10^{3}}{9\cdot10^{16}\times6\cdot10^{-34}} = \frac{10^{-4}}{10^{-17}} = 10^{13}$ photons/m³

Étude de polarisation

Déterminer les polarisations des ondes électromagnétiques suivantes :

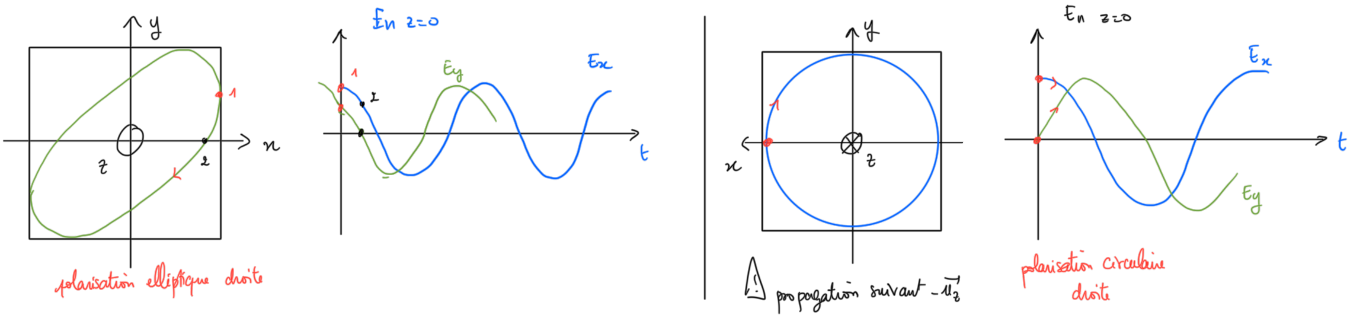
1. Le champ $\vec{E}_1$:

$$E_{1x} = E_o \cos(\omega t - kz) \ ; \ E_{1y} = E_o \cos(\omega t - kz + \pi/3)$$

2. Le champ $\vec{E}_2$:

$$E_{2x} = E_o \cos(\omega t + kz) \ ; \ E_{2y} = E_o \sin(\omega t + kz)$$

1)



Loi de Malus

Un polariseur est un dispositif permettant d'obtenir une onde électromagnétique polarisée rectilignement. Dans le cas d'une onde se propageant suivant $\vec{u}_z$, si on note x la direction du polariseur, on a pour un champ incident :

$$\vec{E}_i = E_{ix} \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_{iy} \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{u}_x$$

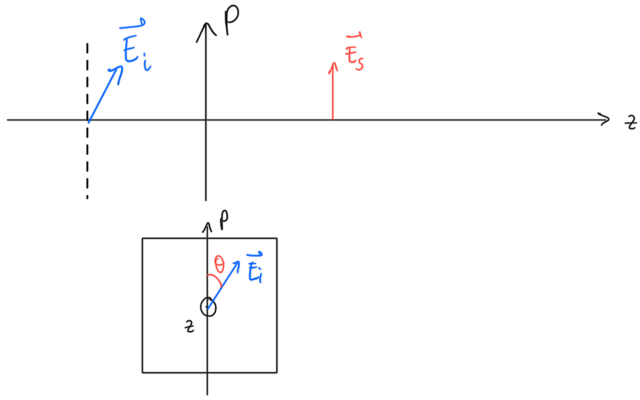
le champ en sortie du polariseur :

$$\vec{E}_s = E_{ix} \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$$

On considère un champ incident $\vec{E}_i$ polarisé rectilignement. On note θ l'angle entre la direction du champ incident $\vec{E}_i$ et $\vec{u}_x$ la direction du polariseur.
Montrer que le champ en sortie du polariseur vérifie :

$$\| < \vec{\Pi}_s > \| = \cos^2 \theta \| < \vec{\Pi}_e > \|$$

Ce résultat est appelé loi de Malus.



$\|\vec{E}_s\| = \|\vec{E}_i\| \cos\theta$

Pour une OPPM $E_0 \cos(\omega t - kz)$

$\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$

$\Rightarrow \| \langle \vec{\Pi}_s \rangle \| = \cos^2\theta \, \| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \|$