

Relation de dispersion

On a obtenu l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Reprendre les hypothèses du cours et déduire $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ du PFD appliqué à un électron.
Retrouver alors la relation de dispersion.

PFD appliqué à l'électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$$

$$\Rightarrow -ne \frac{d\vec{v}}{dt} = -ne \left(\frac{-e \vec{E}}{m} \right)$$

En supposant $\vec{j} = -ne \vec{v}$ (soit en négligeant la contribution des cations)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m} \vec{E} \quad \left. \vphantom{\frac{d\vec{j}}{dt}} \right\} \frac{d\vec{j}}{dt} = \omega_p^2 \vec{E}$$

$$\text{Soit, en posant } \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m \epsilon_0}$$

On utilise ensuite l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \underbrace{\mu_0}_{\mu_0 \epsilon_0 \omega_p^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

On en déduit ensuite la relation de dispersion

$$\text{pour } \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} :$$

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}}$$

Ordre de grandeur

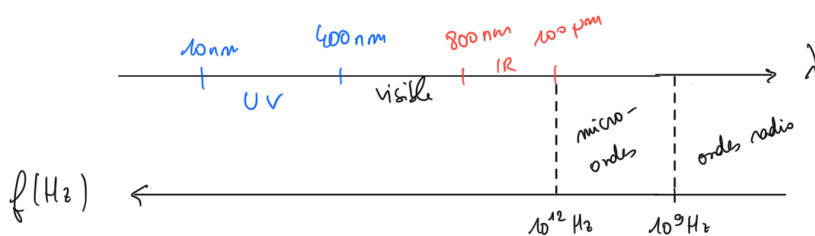
Estimer ω_p et f_p pour la ionosphère. On donne :

$$n = 10^{10} \text{ m}^{-3} ; m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} ; \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$$

Situer le résultat dans le spectre électromagnétique.

$$\underline{A.N.} : \omega_p = \left(\frac{10^{10} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \right)^{1/2} \Rightarrow \underline{\omega_p = 5,6 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}}$$

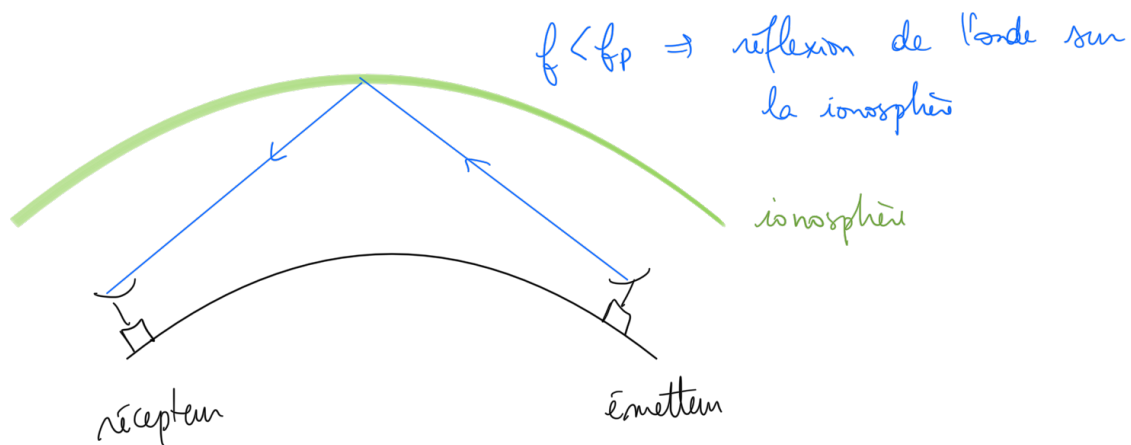
$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \Rightarrow f_p = 9 \cdot 10^2 \text{ kHz} \quad (\sim 1 \text{ MHz})$$



f_p est dans le domaine des ondes radio ou ondes Hertziennes

Expérience de Marconi

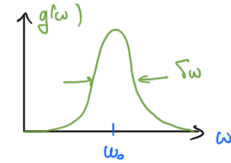
Faire un schéma illustrant la première liaison transatlantique en 1901 (fréquences de l'ordre de la centaine de kHz).



Vitesse de propagation du paquet d'ondes

On considère un paquet d'ondes :

$$\vec{E}(z, t) = \int_0^\infty g(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega \vec{u}_x$$



avec $g(\omega)$ fonction à valeurs réelles positives, non nulle sur une largeur $\delta\omega$ autour de la pulsation ω_0 .

Montrer à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1 que le champ $\vec{E}$ s'écrit :

$$\vec{E}(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_0^\infty g(\omega) e^{i((\omega - \omega_0)(t - z/v_g))} d\omega \vec{u}_x$$

Le signal est de la forme : OPPH à ω_0 * enveloppe. La partie réelle de cette enveloppe est donnée par :

$$e(z, t) = \int_0^\infty g(\omega) \cos((\omega - \omega_0)(t - z/v_g)) d\omega$$

- Que vaut $e(t)$ pour $t - z/v_g = 0$?
- Que vaut $e(t)$ pour $t - z/v_g$ suffisamment grand ?
- Conclusion.

On écrit : $E(z, t) = \underbrace{e^{i\omega_0 t}}_{\text{indépendant de } \omega} \int_0^\infty g(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)t} \underbrace{e^{-ikz}}_{\substack{\text{c'est une fonction de } \omega \\ \text{(relation de dispersion)}}} d\omega$

$g(\omega)$ est non nulle dans une bande $\delta\omega$ autour de ω_0 , dans cette zone, on peut écrire :

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \quad \text{soit} \quad k(\omega) = \underbrace{k_0}_{k(\omega_0)} + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}$$

On a alors :

$$E(z, t) = e^{i\omega_0 t} \int_0^\infty g(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)t} \underbrace{e^{-ik_0 z}}_{\text{indépendant de } \omega} e^{-i(\omega - \omega_0) \frac{z}{v_g}} d\omega$$

$$= \underbrace{e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}}_{\text{OPPH } (\omega_0, k_0)} \int_0^\infty g(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)(t - \frac{z}{v_g})} d\omega$$

enveloppe = forme du paquet d'ondes

1) Pour $z = v_g t$ $e(v_g t, t) = \int_0^\infty g(\omega) d\omega$

aire sous la courbe

2) Si $z \neq v_g t$ $e(z, t) = \int_0^\infty g(\omega) \cos((\omega - \omega_0)(t - \frac{z}{v_g})) d\omega$

fonction de ω qui oscille avec une période $\frac{2\pi}{t - \frac{z}{v_g}}$

l'intégrale est quasi nulle

$\Rightarrow z = v_g t$ correspond au maximum de $e(z, t)$

l'enveloppe se propage à la vitesse v_g .

Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique dans le plasma

On se place dans le cas où $\omega > \omega_p$. On a dans le plasma :

$$\vec{v}_- = \frac{-e}{mi\omega} \vec{E}$$

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$$

$$\vec{B} = \frac{kE_0}{\omega} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

avec $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ et $\omega_p^2 = \frac{n e^2}{m \epsilon_0}$

1. Déterminer $\langle \vec{\Pi} \rangle$.
2. Déterminer $\langle u \rangle$ et $\langle e_c \rangle = n \frac{1}{2} m \langle v_-^2 \rangle$ valeur moyenne de la densité volumique en énergie cinétique des électrons.
3. Vérifier que :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = (\langle u \rangle + \langle e_c \rangle) v_g \vec{u}_z$$

Commenter.

$$\begin{aligned} 1) \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left(\vec{E}_1 \vec{B}_1^* \right) \\ &= \frac{k E_0^2 \epsilon_0}{2\mu_0 \omega} \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \langle u \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\epsilon_0 \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}^*}{2\mu_0} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\epsilon_0 E_0^2 + \frac{k^2}{\omega^2} \epsilon_0 E_0^2 \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle e_c \rangle &= \frac{n m}{2} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\vec{v} \cdot \vec{v}^* \right) \\ &= \frac{n m}{4} \frac{e^2 E_0^2 \epsilon_0}{m^2 \omega^2} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u + e_c \rangle &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \end{aligned}$$

3) On a alors :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k}{\omega} c^2 \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \right) \vec{u}_z$$

$\swarrow$ $\langle u + e_c \rangle$

$$\frac{c^2}{\omega_p^2} = v_g$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u + e_c \rangle v_g \vec{u}_z$$

analogie $\updownarrow$

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

$$\rho \leftrightarrow \langle u + e_c \rangle$$

$$\vec{j} \leftrightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle$$

↳ L'énergie se propage à la vitesse v_g dans le plasma.