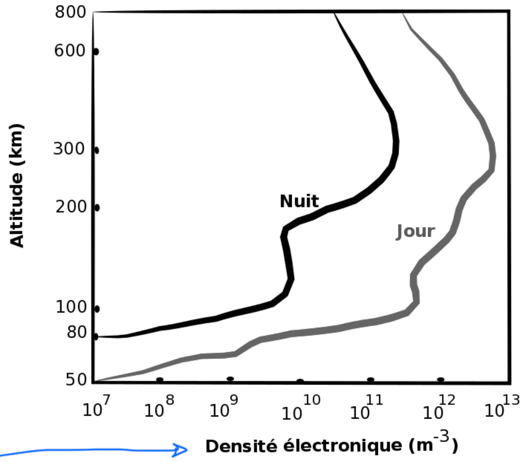
plasma : gaz ionisé

# Électromagnétisme
## Chapitre 8 - Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma dilué

Sous l'effet des rayonnements cosmiques :

$M \longrightarrow \underbrace{M^+}_{\text{cation}} + e^-$




Couche de l'atmosphère entre 70 km et 800 km d'altitude appelée ionosphère

**Figure 6** Évolution de la densité électronique dans l'ionosphère en fonction de l'altitude (d'après Culture Sciences - Physique, ENS Lyon)

Notations :

— On note $n$ le nombre d'électrons par unité de volume :

$$\rho_- = -ne$$

— En considérant qu'un atome donne un électron et un ion de charge $+e$ :

$$\rho_+ = +ne$$

Le milieu est donc globalement **neutre** : $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$

— On note $\vec{v}_-$ la vitesse de déplacement des électrons et $\vec{v}_+$ celle des ions. Le vecteur densité volumique de courant s'écrit :

$$\vec{j} = \rho_-\vec{v}_- + \rho_+\vec{v}_+$$

$$\vec{j} \neq \vec{0}$$

On pourrait avoir :

$M \longrightarrow M^{2+} + 2e^-$

$\Rightarrow n_- = 2n_+$

$\rho = -e\,n^- + \underbrace{2e}_{\text{charge de } M^{2+}}\,n^+ = 0$

$e^-$ $\vec{v}_-$, $M^+$ $\vec{v}_+$ : déplacements opposés.

# I. Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

## 1. Des équations de Maxwell aux équations de propagation

$\rho = 0$ , $\vec{j} \neq \vec{0}$

$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\qquad$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad$ $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right) = \vec{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$

$\Rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{0} - \Delta\vec{E}$

$\Rightarrow -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta\vec{E}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}}$ Equation de propagation

L'équation de propagation fait intervenir $\vec{j}$ qui provient de la mise en mouvement des porteurs de charges sous l'action de la force de Lorentz.

idée : $\vec{j}$ lié à $\vec{E}$

### 2. Densité volumique de courant $\vec{j}$

On considère que le plasma est soumis à une OPPM :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_o \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \ ; \ \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_o \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

On écrit les équations de Maxwell en utilisant la notation complexe (*Attention au choix de la convention choisie*) :

$\mathrm{div}\, \underline{\vec{E}} = -i\vec{k}.\underline{\vec{E}}$

$\vec{\mathrm{rot}}\, \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$

$$-i\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$$
$$-i\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$$

$\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ sont transverses

$$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \Rightarrow \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

Relation de structure

Pour déterminer $\vec{j}$, on doit déterminer la vitesse des porteurs de charge lors du passage de l'OPPM. On s'intéresse dans un premier temps à la vitesse des électrons.

**Système :** électron de masse $m$ de charge $-e$
**Bilan des forces :**
- Force de Lorentz : $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v}_- \wedge \vec{B})$
- On néglige l'action des autres particules sur l'électron considéré (plasma dilué, $n$ de l'ordre de $10^{11}\mathrm{m}^{-3}$).
- On néglige l'effet de la pesanteur.

**Ordres de grandeur :** On compare les ordres de grandeur de la force magnétique et de la force électrique :

$$\frac{ev_-B}{eE} = \frac{v_-B}{E}$$

$B \sim \frac{k}{\omega} E$

d'après la relation de structure

On fait l'hypothèse (à vérifier) que la vitesse de phase dans le milieu $\frac{\omega}{k}$ est proche de $c$ :

$$\frac{B}{E} \simeq \frac{1}{c}$$

On a alors :

$$\frac{evB}{eE} \simeq \frac{v}{c} \ll 1$$

mouvement non relativiste

**PFD appliqué à l'électron :**

$\frac{d\underline{\vec{v}}_-}{dt} = i\omega \underline{\vec{v}}_-$

ou $\int \underline{\vec{E}}\, dt = \frac{\underline{\vec{E}}}{i\omega}$

$$m\frac{d\vec{v}_-}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow \underline{\vec{v}}_- = \frac{-e}{i\omega\ m}\underline{\vec{E}}$$

On montre de la même façon que la vitesse des ions de masse $M$ dans le milieu :

$$\underline{\vec{v}}_+ = \frac{e}{i\omega\ M}\underline{\vec{E}}$$

On peut alors écrire le vecteur densité de courant :

$$\underline{\vec{j}} = \left(\frac{ne^2}{i\omega\ m} + \frac{ne^2}{i\omega\ M}\right)\underline{\vec{E}}$$

La masse d'un proton est environ $2.10^3$ fois plus grande que celle d'un électron :

$$M \gg m$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{j}} \simeq \frac{ne^2}{i\omega\ m}\underline{\vec{E}}$$

On peut introduire une conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{ne^2}{i\omega\ m}$$

### 3. Relation de dispersion

On insère $\underline{\vec{j}}$ dans l'équation de propagation :

$$-k^2\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \mu_o i\omega\frac{ne^2}{i\omega\ m}\underline{\vec{E}}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

$$-k^2 \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}(-\omega^2)\underline{\vec{E}} = \mu_0 i\omega \underbrace{\frac{ne^2}{i\omega m}\underline{\vec{E}}}_{\underline{\vec{j}}}$$

$$\Rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \underbrace{\mu_0\varepsilon_0 \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}_{\frac{1}{c^2}\omega_p^2}$$

On introduit la pulsation plasma $\omega_p$ telle que :

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_o}$$

La relation de dispersion s'écrit alors :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

## II. Analyse des solutions

### 1. Premier cas : $\omega > \omega_p$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \text{ dans le plasma}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{ dans le vide}$$

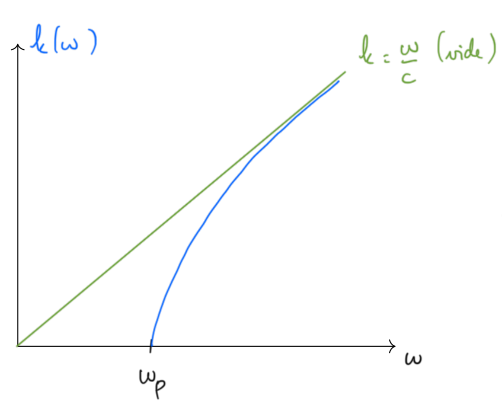
Rappel : $v_\varphi$ = vitesse de propagation de l'OPPM.

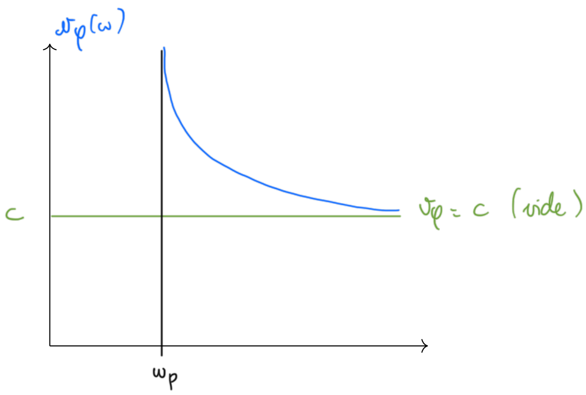
$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

La vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

On peut tracer $k$ et $v_\varphi$ :




- $v_\varphi$ dépend de $\omega$ : le milieu est dit **dispersif**.
- $v_\varphi$ est supérieure à $c$ mais une OPPM est un outil mathématique (voir III), $v_\varphi$ ne correspond pas à la vitesse de propagation d'une information réelle.
- Pour $\omega$ très grand :

  $$k \simeq \frac{\omega}{c}$$

  On retrouve le comportement du vide, la ionosphère est assimilable au vide dans le cas des ondes lumineuses.
- $\frac{E}{B} > c$ : l'hypothèse de départ qui nous a permis de négliger la force magnétique est bien vérifiée. *Attention, ce ne sera pas toujours le cas. On peut imaginer un dispositif dans lequel le plasma est soumis à un champ magnétique intense en plus de celui de l'onde incidente.*

### 2. Puissance cédée à la matière $\vec{j}.\vec{E}$

Le passage de l'OPPM entraîne l'apparition d'un vecteur densité de courant $\underline{\vec{j}}$.
L'onde électromagnétique cède une puissance volumique $p_v = \vec{j}.\vec{E}$.
La puissance volumique moyenne :

$$< \vec{j}.\vec{E} >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*\right)$$

$$\underline{\vec{j}} = \frac{ne^2}{i\omega\ m}\underline{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow < \vec{j}.\vec{E} >= 0$$

⚠ il ne faut pas utiliser $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ directement
↗ passer à $\vec{j}$ et $\vec{E}$
↘ utiliser $\langle \vec{j}.\vec{E} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*)$

L'OPPM ne cède en moyenne aucune puissance au plasma. Dans le cas où $\omega > \omega_p$, sa propagation se fait donc sans atténuation.

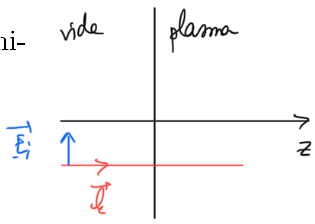
### 3. Deuxième cas : $\omega < \omega_p$

On a cette fois :

$k^2 < 0 \Rightarrow$ on écrit $k^2 = -\underbrace{\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}}_{>0}$

$$k = \pm i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm ik'$$

avec $k'$ réel positif.
On considère par exemple l'arrivée d'une OPPM sur un plasma occupant le demi-espace $z > 0$ :




$$\underline{\vec{E}_i} = E_i\ \mathrm{e}^{i(\omega(t-z/c))}\vec{u}_x$$

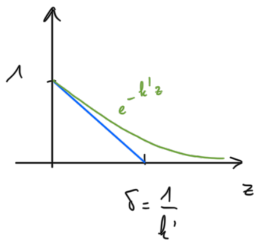
Le champ $\underline{\vec{E}}$ dans le plasma s'écrit alors :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_o\mathrm{e}^{i(\omega t-(-ik')z)}\vec{u}_x + \underline{E}'_o\mathrm{e}^{i(\omega t-(+ik')z)}\vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = \underline{E}_o\ \mathrm{e}^{-k'z}\mathrm{e}^{i\omega t}\vec{u}_x + \underline{E}'_o\mathrm{e}^{k'z}\mathrm{e}^{i\omega t}\vec{u}_x$$

La composante en $\mathrm{e}^{k'z}$ diverge, on ne garde que l'autre composante et on a :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_o\ \mathrm{e}^{-k'z}\mathrm{e}^{i\omega t}\vec{u}_x \text{ avec } \vec{k} = -ik'\vec{u}_z$$




Conséquences :

— Ce n'est pas une onde progressive : l'onde ne se propage pas dans le plasma. Le champ $\vec{E}$ est non nul sur une épaisseur caractéristique $\delta = 1/k'$.
— Le résultat est similaire pour le champ magnétique :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega} \Rightarrow \underline{\vec{B}} = \frac{-ik'}{\omega}\underline{E}_o\ \mathrm{e}^{-k'z}\mathrm{e}^{i\omega t}\vec{u}_y$$

— Le vecteur de Poynting moyen dans le plasma :

$$< \vec{\Pi} >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*}{\mu_o}\right)$$

$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\Big(\underbrace{\underline{E}_0 e^{-k'z} e^{i\omega t} . \frac{ik'}{\omega}\underline{E}_0^* e^{-k'z} e^{-i\omega t}}_{\underbrace{|\underline{E}_0|^2 e^{-2k'z} \frac{ik'}{\omega}}_{\text{imaginaire pur}}}\Big)\vec{u}_z$

$\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$

est donc nul. L'onde incidente est totalement réfléchie.

Les ondes du type :

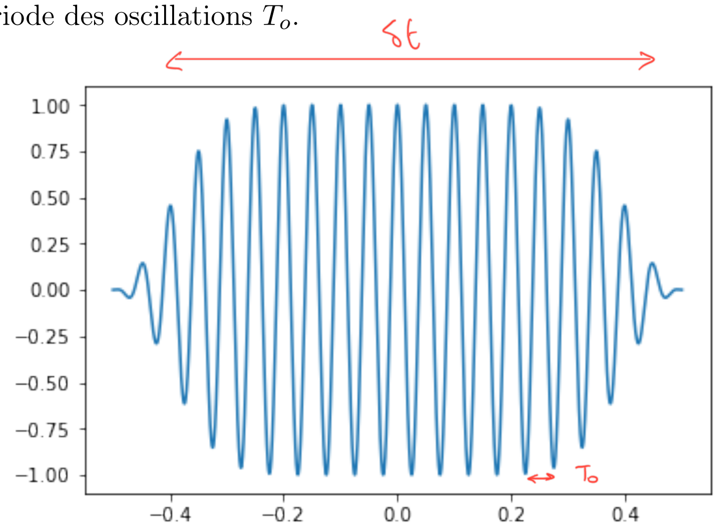
$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_o\ \mathrm{e}^{-k'z}\mathrm{e}^{i\omega t}\vec{u}_x$$

sont appelées **ondes évanescentes**. Elles ne transportent pas d'énergie et ne se propagent pas contrairement aux ondes progressives (elles font parti de la famille des ondes stationnaires).

## III. Paquet d'ondes - Vitesse de groupe

### 1. Notion de paquet d'onde

On représente un signal réel en un point de l'espace. On repère deux temps caractéristiques :
- La durée du signal $\delta t$ ;
- La période des oscillations $T_o$.

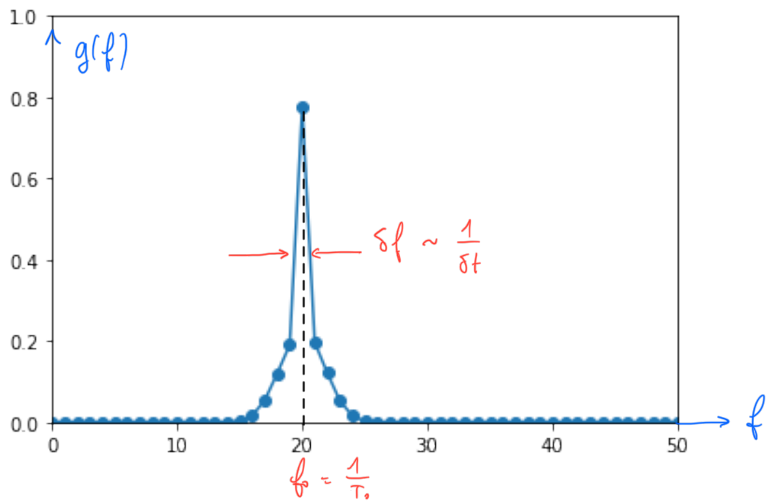



On peut relier ces **caractéristiques temporelles** aux **caractéristiques spectrales** :
- Pulsation centrale :

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$$

- Largeur spectrale :

$$\delta\omega \simeq \frac{1}{\delta t}$$




Voir fichier "PaquetOndes"
↳ on a calculé le spectre d'un paquet d'ondes à l'aide de numpy.fft.rfft

Un paquet d'ondes de pulsation $\omega_o$ se propageant suivant $\vec{u}_z$ et polarisé suivant $\vec{u}_x$ est une combinaison d'OPPM de pulsations proches de la pulsation $\omega_o$ se propageant suivant $\vec{u}_z$ et polarisées suivant $\vec{u}_x$ d'amplitudes $g(\omega)$ fixant la forme du paquet.

$g(\omega)$ est non nulle sur une bande $\delta\omega$ autour de $\omega_o$.

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \int_0^{\infty} g(\omega)\, \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} d\omega\, \vec{u}_x$$

$g(\omega)$ correspond par exemple au spectre d'une raie dans le cas d'un paquet d'onde émis par une lampe spectrale. $k(\omega)$ est donné par la relation de dispersion.

### 2. Vitesse de groupe

On considère un paquet d'onde se propageant dans un milieu dans lequel $k$ et $\omega$ sont reliés par la relation de dispersion $k = k(\omega)$.
Une OPPM se propage dans le milieu à la **vitesse de phase** :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Un paquet d'ondes de pulsation centrale $\omega$ se propage à la **vitesse de groupe** :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Retour sur l'exemple du plasma :
On écrit la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$$

idée : ① on dérive par rapport à $x$

$$2\,\frac{dk}{\cancel{dx}}\,k = \frac{1}{c^2}\,2\,\frac{d\omega}{\cancel{dx}}\,\omega$$

" on simplifie les $dx$ " ...

② on peut penser à un changement de variable : $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

On différencie cette relation :

$$2\ k\ dk = \frac{1}{c^2}\ 2\ \omega\ d\omega$$

On en déduit :

$$\frac{\omega}{k}.\frac{d\omega}{dk} = c^2 \ \Rightarrow\ v_\varphi.v_g = c^2$$

Dans le cas où $\omega > \omega_p$, on a obtenu :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$\Rightarrow v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

La vitesse de groupe est bien inférieure à $c$.