Électromagnétisme
Chapitre 9 - Conducteur ohmique

I. Effet de peau

1. Équations de Maxwell dans le conducteur

On souhaite établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}$ dans un matériau conducteur de conductivité γ.

Densité volumique de courant :

La loi phénoménologique :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

loi d'Ohm locale

$\gamma \simeq 10^7\ S.m^{-1}$

est valable en régime variable pour des fréquences inférieures à 10^{14} Hz (longueurs d'ondes supérieures à 3μm). À très haute fréquence, le courant ne peut s'adapter instantanément aux variations du champ imposées (on peut alors introduire une conductivité complexe pour traduire le retard de $\vec{j}$ par rapport à $\vec{E}$).

On se place dans la suite dans le cas où $f \ll 10^{14}$ Hz.

Densité volumique de charges :

On écrit l'équation locale de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_o}\rho = 0$$

$\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$

On suppose qu'il existe une densité volumique de charge ρ_o non nulle en un point M à l'instant $t = 0$. On a alors :

$$\rho(M,t) = \rho_o\ e^{-t/\tau}$$

$\varepsilon = 8{,}85.10^{-12}\ F.m^{-1}$

$\simeq 10^{-11}\ F.m^{-1}$

$\Rightarrow \tau \sim 10^{-18}\ s$

avec $\tau = \varepsilon_o/\gamma$.

$\tau \simeq 10^{-18}$ s $\ll 1/f$: $\rho(M,t) \simeq 0$ très rapidement (par rapport à la période d'évolution des phénomènes observés) au point M. Dans la suite, on considèrera donc $\rho = 0$ dans le conducteur.

Courant de déplacement :

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_o \left(\gamma \vec{E} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$\vec{j}$ = courant de conduction

$\varepsilon_o \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: courant de déplacement

Comparons les ordres de grandeur du courant de conduction et du courant de déplacement :

$$\frac{\|\gamma \vec{E}\|}{\|\varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|} = \frac{\gamma}{\varepsilon_o \omega}$$

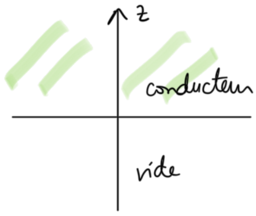
Application numérique :

$$\frac{\|\gamma \vec{E}\|}{\|\varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|} \simeq \frac{6.10^7}{8,85.10^{-11}\omega} = \frac{7.10^{18}}{\omega} \gg 1$$

$\omega = 2\pi f \ll 10^{14}\ rad.s^{-1}$

$\Rightarrow$ On écrira $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_o \gamma \vec{E}$

2. Équation de propagation



On considère un matériau conducteur occupant le demi-espace $z > 0$.
Une OPPM arrive depuis le vide ($z < 0$) sur le conducteur. On cherche $\vec{E}(z,t)$ dans le conducteur.

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = 0 \qquad \mathrm{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_o \gamma \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{E})) - \Delta\vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E} = \mu_o\, \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

du type **équation de diffusion** comme l'équation de la chaleur $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$

Résolution :
On cherche le champ électrique sous la forme d'une OPPM : $\underline{\vec{E}} = E_o\, e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_x$. On a alors :

$$-k^2 = i\omega\mu_o\, \gamma$$

$-i = e^{-i\pi/2} = \left(e^{-i\pi/4}\right)^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\Rightarrow k^2 = \left(\sqrt{\omega\mu_0\gamma}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right)^2$

On introduit l'**épaisseur de peau** :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_o\gamma\omega}}$$

$$\Rightarrow k = \pm\frac{1-i}{\delta}$$

$k = \frac{1-i}{\delta}$ $\qquad$ $k = -\frac{1-i}{\delta}$

On écrit le champ électrique :

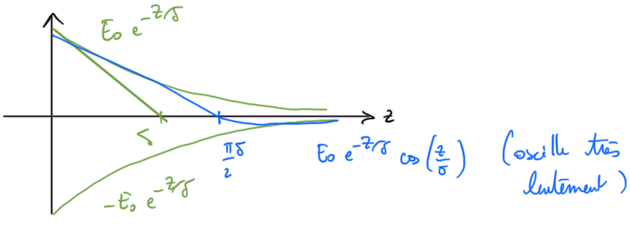
$$\underline{\vec{E}} = \underbrace{E_o e^{-z/\delta}}_{\text{atténuation}}\ \underbrace{e^{i(\omega t - z/\delta)}}_{\text{propagation}}\vec{u}_x + E'_o e^{z/\delta}\ e^{i(\omega t + z/\delta)}\vec{u}_x$$

δ : épaisseur caractéristique $\qquad v_\varphi = \omega\delta$

→ diverge lorsque $z \to \infty$, pas acceptable physiquement dans le cas d'un conducteur occupant le ½ espace $z > 0$

$$\Rightarrow \text{On écrit } \begin{cases} \underline{\vec{E}} = E_0\, e^{-z/\delta}\, e^{i(\omega t - z/\delta)}\,\vec{u}_x \\ \vec{E} = E_0\, e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u}_x \end{cases}$$

(famille des ondes évanescentes)



On peut estimer la valeur de l'épaisseur de peau δ :
- Pour $f = 50$Hz : $\delta = 9,2.10^{-3}$ m.
- pour $f = 10$MHz, $\delta = 2.10^{-5}$ m : on utilisera des guides d'ondes à la place des fils pour transporter l'onde (voir partie III).

Modèle du conducteur parfait :
Un conducteur parfait est un conducteur dont la conductivité tend vers l'infini.
Lorsque $\gamma \to +\infty$, la puissance volumique $\vec{j}.\vec{E} = \gamma E^2$ doit restée finie : Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait.
On aurait pu aussi utiliser le fait que l'épaisseur de peau tend vers 0 lorsque $\gamma \to +\infty$.

Dans un conducteur parfait, $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$ et $\rho = 0$
↳ il peut exister σ (charges surfaciques) et $\vec{j}_s$ (courants surfaciques)

3. Aspects énergétiques

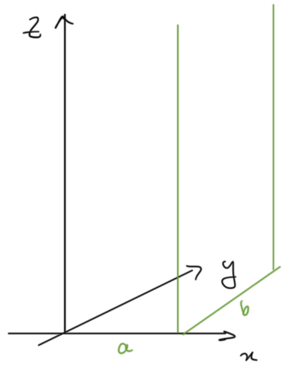
$$\vec{E} = E_o\ e^{-z/\delta}\ \cos(\omega t - z/\delta)\vec{u}_x$$

La loi d'Ohm locale donne immédiatement :

$$\vec{j} = \gamma E_o\ e^{-z/\delta}\ \cos(\omega t - z/\delta)\vec{u}_x$$

L'équation de Maxwell-Faraday permet de déterminer :

$$\vec{B} = \frac{E_o}{\delta\ \omega} e^{-z/\delta} \left(\sin(\omega t - z/\delta) + \cos(\omega t - z/\delta)\right) \vec{u}_y$$



On considère une portion de conducteur de dimension a suivant x et b suivant y, de profondeur très grande devant δ suivant z.

Puissance moyenne dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{P}_J = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{\infty} < \vec{j}.\vec{E} > d\tau$$

$$\langle \vec{j}\cdot\vec{E} \rangle = \frac{\gamma E_o^2}{2} e^{-2z/\delta} \quad \text{car} \quad \langle \cos^2(\omega t - \frac{z}{\delta}) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_J = ab \int_0^{+\infty} \frac{\gamma E_o^2}{2} e^{-2z/\delta}\, dz$$

$$= ab \frac{\gamma E_o^2}{2} \left[-\frac{\delta}{2} e^{-2z/\delta} \right]_0^{+\infty}$$

Soit $\boxed{\mathcal{P}_J = \dfrac{ab\delta\, \gamma E_o^2}{4}}$

Flux du vecteur de Poynting en $z = 0$

$$\Phi = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} < \vec{\Pi} > .d\vec{S}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_o^2}{\delta\omega} \frac{e^{-2z/\delta}}{2\mu_o} \vec{u}_z$$

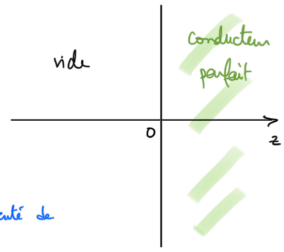
$$\Rightarrow \Phi(z=0) = \frac{ab E_o^2 \delta}{2\delta\, \omega\, \mu_o\, \delta} \qquad \text{avec} \quad \delta^2 = \frac{2}{\mu_o \gamma \omega}$$

$$= \frac{ab\, E_o^2\, \delta}{2\, \omega\, \mu_o\, 2} \mu_o \gamma \omega$$

$$= \boxed{\frac{\gamma\, ab\, \delta\, E_o^2}{4}}$$

La puissance électromagnétique entrant en $z=0$ est dissipée dans le conducteur par effet Joule.

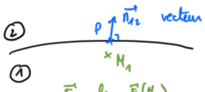
II. Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait



Une OPPM se propageant dans le vide ($z < 0$) arrive en $z = 0$ sur un conducteur parfait ($z > 0$). À l'interface entre les deux milieux, les équations de Maxwell ne sont pas adaptées et le champ électromagnétique doit vérifier les relations de passages :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{n}_{12}$$

← densité surfacique de charges

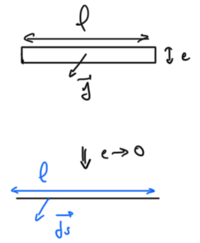


$\vec{n}_{12}$ vecteur unitaire orienté de ① vers ②

$\vec{E}_1 = \lim_{M_1 \to P} \vec{E}(M_1)$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_o \underbrace{\vec{j}_s}_{\text{courant surfacique}} \wedge \vec{n}_{12}$$

On observe ainsi une discontinuité de la composante normale du champ électrique en présence de charges surfaciques. La composante tangentielle de $\vec{E}$ est par contre continue. C'est l'inverse pour le champ magnétique, la discontinuité de $\vec{B}$ tangentiel étant liée à l'existence de courants surfaciques ($\vec{j}_s$ en A/m).
Dans cette partie $\vec{E}_2$ et $\vec{B}_2$ sont nuls car le conducteur est considéré comme parfait.



$I = j \cdot e \cdot \ell = j_s \cdot \ell$

$\Rightarrow \boxed{j_s = j \cdot e}$

1. Expression de l'onde réfléchie

On considère une onde incidente polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$.

$$\underline{\vec{E}}_i = E_{oi}\ e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_x$$

$\vec{k} = k\,\vec{u}_z$
↳ incidence normale

On remarque que $\underline{\vec{E}}_i$ ne peut représenter seul le champ électrique dans le vide : il ne vérifie pas la relation de passage en $z = 0$:

$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$

↳ $\vec{0} - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$ ici

$$-E_{oi}\ e^{i(\omega t - k.0)}\vec{u}_x \neq \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{u}_z$$

On suppose alors l'existence d'une onde réfléchie :

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_{or}\ e^{i(\omega_r t + k_r z)}$$

Cette onde se propage dans le vide suivant $-\vec{u}_z$, le champ $\underline{\vec{E}}_r$ doit être transverse :

$$\underline{\vec{E}}_r.\vec{u}_z = 0$$

La relation de dispersion impose d'autre part : $k_r = \omega_r/c$. La linéarité du problème impose a priori $\omega_r = \omega$, on va voir que cette égalité est également imposée par la relation de passage.
L'onde du côté (1) est la somme des ondes incidentes et réfléchies :

$$\underline{\vec{E}}_1 = E_{oi}\ e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_x + \underline{\vec{E}}_{or}\ e^{i(\omega_r t + k_r z)}$$

L'onde du côté (2) est nulle, si on suppose que le conducteur est parfait, on a donc en tout point du plan $z = 0$:

$$\vec{0} - \underline{\vec{E}}_1(z = 0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$$

$0 - \underbrace{\vec{E}_1 \cdot \vec{u}_z}_{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

($\vec{E}_i$ et $\vec{E}_r$ sont transverses)

$\Rightarrow \sigma = 0$

Dans le cas de l'incidence normale : $\underline{\vec{E}}_1.\vec{u}_z = 0 \to \sigma = 0$.
On a ainsi :

$$E_{io}\ e^{i\omega t}\vec{u}_x + \underline{\vec{E}}_{or}\ e^{i\omega_r t} = \vec{0}$$

Cette relation est valable à chaque instant t, les pulsations ω et ω_r sont donc égales.
On a également $k_r = k = \omega/c$.
En simplifiant par l'exponentielle, on obtient finalement :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_{or} = -E_{oi}\vec{u}_x}$$

Résultat utilisé dans le cours d'optique

La réflexion sur un conducteur parfait entraine un déphasage de π sur le champ électrique.

2. Structure du champ résultant

$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

On déterminer les champs magnétiques associés à $\underline{\vec{E}}_i$ et $\underline{\vec{E}}_r$ à l'aide de la relation de structure (OPPM dans le vide).

$$\vec{E}_i = E_o \, e^{i(\omega t - kz)} \, \vec{u}_x \Rightarrow \vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_o}{c} \, e^{i(\omega t - kz)} \, \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_r = -E_o \, e^{i(\omega t + kz)} \, \vec{u}_x \Rightarrow \vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{E_o}{c} \, e^{i(\omega t + kz)} \, \vec{u}_y$$

Le champ électromagnétique dans le vide s'écrit alors :

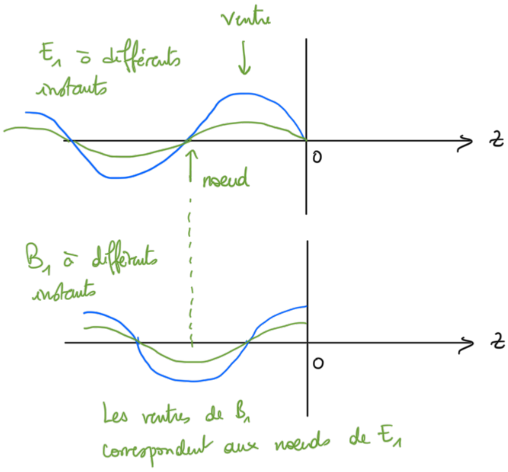
$$\underline{\vec{E}}_1 = E_{oi} \left(e^{i(\omega t - kz)} - e^{i(\omega t + kz)} \right) \vec{u}_x$$

$$\underline{\vec{B}}_1 = \frac{E_{oi}}{c} \left(e^{i(\omega t - kz)} + e^{i(\omega t + kz)} \right) \vec{u}_y$$

Soit :

$$\underline{\vec{E}}_1 = -2iE_{oi} \; e^{i\omega t} \sin(kz) \vec{u}_x$$

$$\underline{\vec{B}}_1 = 2\frac{E_{oi}}{c} \; e^{i\omega t} \cos(kz) \vec{u}_y$$



Les champs réels s'écrivent alors :

$$\vec{E}_1 = 2E_{oi} \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_1 = 2\frac{E_{oi}}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

On parle d'**onde stationnaire**.

3. Aspects énergétiques

Vecteurs de Poynting des ondes incidentes et réfléchies :

Le vecteur de Poynting moyen associé à l'onde incidente :

$$< \vec{\Pi}_i > = \frac{E_{oi}^2}{2\mu_o c} \vec{u}_z$$

Celui de l'onde réfléchie :

$$< \vec{\Pi}_r > = \frac{E_{oi}^2}{2\mu_o c} (-\vec{u}_z)$$

Le coefficient de réflexion en puissance :

$$R = \frac{\| < \vec{\Pi}_r > \|}{\| < \vec{\Pi}_i > \|} = 1$$

Toute la puissance de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. Il n'y a pas de dissipation dans le conducteur parfait (conductance infinie $\rightarrow$ résistance nulle).

Vecteur de Poynting moyen de l'onde stationnaire :

$$\vec{\Pi}_1 = \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1}{\mu_o} \Rightarrow \vec{\Pi}_1 = \frac{4E_{oi}^2}{\mu_o c} \cos(kz) \sin(kz) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow < \vec{\Pi}_1 > = \vec{0}$$

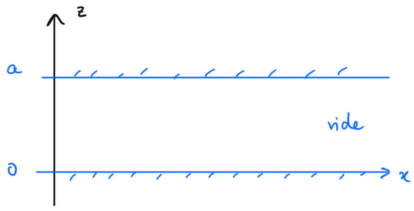
L'énergie associée à l'onde stationnaire ne se propage pas, elle reste confinée entre les plans correspondant aux ventres et aux nœuds de $\vec{E}_1$ et $\vec{B}_1$.

III. Application aux cavités à une dimension

1. Propagation d'une onde électromagnétique dans un guide d'onde

Description du problème :

On considère un système constitué de deux plans conducteurs parallèles distants de a, considérés comme infinis et assimilés à des conducteurs parfaits. Le milieu entre les conducteur est assimilé à du vide.



On cherche le champ électrique $\vec{E}$ sous la forme d'une onde se propageant suivant $\vec{u}_x$:

$$\underline{\vec{E}} \propto e^{i(\omega t - kx)}$$

Pour tenir compte de la limitation spatiale imposée par les conducteurs, on prend :

$$\underline{\vec{E}} = f(z) e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$$

Pas de dépendance en y car dans le cas de plaques infinies, il y a invariance par translation. Le choix $\vec{u}_y$ permet d'avoir $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$ mais ce n'est pas obligatoire. On dit qu'on a choisi d'étudier un mode transverse électrique.

Pour $x = x_0$ fixé, l'amplitude dépend de z.

Remarques :

Ce n'est pas une onde plane, il faudra faire attention lorsqu'on calculera le champ magnétique associé.

Elle doit vérifier les équations de Maxwell dans le vide (et par conséquent l'équation de propagation dans le vide).

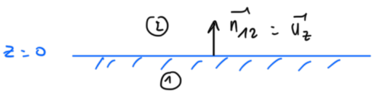
$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

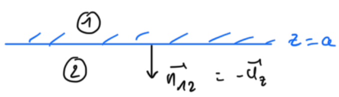
$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad$ $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Elle doit également vérifier les conditions aux limites en $z = 0$ et $z = a$.

$\underbrace{\vec{E}_{vide}(z=0)}_{\text{suivant } \vec{u}_y} - \vec{0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z \Rightarrow f(0) = 0$





$\underbrace{\vec{E}_{vide}(z=a)}_{\text{suivant } \vec{u}_y} - \vec{0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}(-\vec{u}_z) \Rightarrow f(a) = 0$

Résolution :

On injecte $\underline{\vec{E}}$ dans l'équation de propagation, on obtient :

$$f''(z) - k^2 f(z) + \frac{\omega^2}{c^2} f(z) = 0$$

$\Delta \vec{E} = \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$

$= \left(-k^2 f(z) e^{i(\omega t - kx)} + f''(z) e^{i(\omega t - kx)}\right)\vec{u}_y$

$\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 f(z) e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$

La fonction $f(z)$ est donc solution de l'équation différentielle :

$$f''(z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f(z) = 0$$

avec :

$$f(0) = f(a) = 0$$

Les cas $\omega^2/c^2 \leq k^2$ donnent des solutions ne pouvant s'annuler 2 fois et ne peuvent pas convenir.

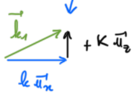
$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = K^2 > 0$

On pose alors :

$$K = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$$

$$\Rightarrow f(z) = A_o e^{iKz} + A_1 e^{-iKz}$$

$$\vec{E} = A_o \, e^{i(\omega t \underbrace{- kx + Kz}) } \vec{u}_y + A_1 \, e^{i(\omega t \underbrace{- kx - Kz})} \vec{u}_y$$



On peut voir $\vec{E}$ comme la superposition de 2 OPPM de vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$

On peut aussi écrire :

$$f(z) = E_o \cos(Kz) + E_1 \sin(Kz)$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} E_o = 0 & f(0) = 0 \\ E_o \cos(Ka) + E_1 \sin(Ka) = 0 & f(a) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_o = 0 \ , \ K = \frac{n\pi}{a} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Et finalement,

$$\underline{\vec{E}} = E_1 \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$$

Relation de dispersion :

On a toujours $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$

$\Rightarrow \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - n^2\frac{\pi^2}{a^2}$$

On peut introduire une pulsation de coupure :

$$\omega_c = \frac{\pi c}{a}$$

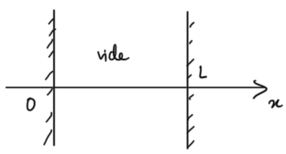
$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_c^2}{c^2}$

La propagation n'est possible que pour $\omega > \omega_c$ (filtrage passe-haut).

2. Cavité à une dimension

On considère une cavité à une dimension (généralisable à trois dimensions, exemple : four à micro-ondes) dont les bords en $x = 0$ et $x = L$ sont constitués de conducteurs parfaits, l'intérieur de la cavité étant assimilé au vide.

Compte-tenu du caractère borné du système, on cherche le champ électrique sous la forme d'une onde **stationnaire** :



$$\vec{E} = \underbrace{f(x)}_{\text{forme } (x)} . \overbrace{g(t)}^{\text{amplitude } (t)} \vec{u}_y$$

Les conditions aux limites imposant :

$$f(0) = f(L) = 0$$

On injecte $\vec{E}$ dans l'équation de propagation :

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2} f(x) g''(t) = 0$$

Séparation des variables :

$$\Rightarrow \underbrace{c^2\frac{f''(x)}{f(x)}}_{\text{fonction de } x} = \underbrace{\frac{g''(t)}{g(t)}}_{\text{fonction de } t} = A \text{ constante indépendante de } x \text{ et } t$$

Soit :

$$g''(t) - Ag(t) = 0 \ ; \ f''(x) - \frac{A}{c^2}f(x) = 0$$

Les contraintes sur le champ $\vec{E}$ imposent de prendre une constante A négative :

— Le champ $\vec{E}$ est borné : l'équation en t ne peut pas donner des solutions en exponentielles divergentes.

— $f(x)$ doit s'annuler en deux points ce qui exclue également les équations différentielles pour lesquelles les racines de l'équation caractéristique sont réelles.

On pose alors :

$$A = -\omega^2 \ ; \ k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$f(x) = f_o\cos(kx) + f_1\sin(kx)$$

$$g(t) = g_o\cos(\omega t + \varphi)$$

On exploite ensuite les conditions aux limites :

$$\begin{cases} f_o + f_1.0 = 0 & f(0) = 0 \\ f_o\cos(kL) + f_1\sin(kL) = 0 & f(L) = 0 \end{cases}$$

On a ainsi :

$$f_o = 0 \ ; \ \sin(kL) = 0$$

Les valeurs de k sont donc quantifiées : on associe un nombre n à chaque **mode propre** correspondant à :

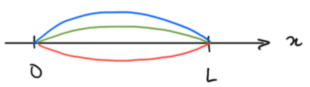
$$k_n = \frac{n\pi}{L} \ ; \ \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

La solution générale est une combinaison linéaire des modes propres.

$$E(x,t) = \sum_n E_{on}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right)$$

E_{on} et φ_n sont déterminés par les conditions initiales $\begin{cases} E(x,0) \\ \frac{\partial E}{\partial x}(x,0) \end{cases}$

$\lambda_1 = 2L \Rightarrow k_1 = \frac{\pi}{L}$

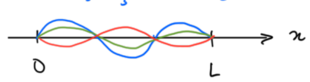


$n = 1$ 1 ventre, 2 noeuds

$\lambda_2 = L \Rightarrow k_2 = \frac{2\pi}{L}$

$n = 2$ 2 ventres, 3 noeuds

$\lambda_3 = \frac{2L}{3} \Rightarrow k_3 = \frac{3\pi}{L}$



$n = 3$ 3 ventres, 5 noeuds