

Optique

Chapitre 2 - Superposition d'ondes lumineuses

Rappels du chapitre 1 : la vibration lumineuse en M émise par une source monochromatique en S s'écrit :

$$\underline{s}_1(M) = s_{o1} e^{i(\omega t - \varphi_1(M))}$$

Avec :

$$\varphi_1(M) = \varphi_1(S) + \frac{2\pi}{\lambda_o} \mathcal{L}_{SM}^{(1)}$$

Il faut également tenir compte :

- de la longueur de cohérence ℓ_c de la source considérée (ou du temps de cohérence τ_c) ;
- de l'influence du récepteur utilisé pour la mesure :

$$I = \langle s^2 \rangle_\tau$$

Les **interférences lumineuses** correspondent à l'interaction entre plusieurs ondes qui produisent une intensité différente de la somme des intensités.

Nous allons voir quelles conditions mènent à l'observation d'interférences lumineuses en un point M lors de la superposition de deux rayons lumineux.

La phase à l'origine $\varphi_1(S)$ varie d'un train d'onde à l'autre.

On rappelle : $\begin{cases} \ell_c = c \tau_c \\ \ell_c = \frac{\lambda_o^2}{\Delta\lambda} \end{cases}$

τ_c = temps caractéristique du photodétecteur ($> 10^{-9} s$)

I. Superposition de deux ondes lumineuses

1. Formule de Fresnel

On considère deux ondes lumineuses de même pulsation ω (même longueur d'onde dans le vide λ_o), correspondant à un même train d'ondes ($\varphi_1(S) = \varphi_2(S) = \varphi_o(S)$).

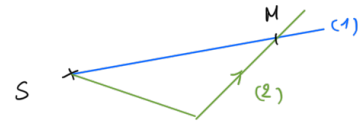
Le **théorème de superposition** permet d'écrire :

$$\underline{s}_{tot}(M) = \underline{s}_1(M) + \underline{s}_2(M)$$

Le théorème de superposition permet d'écrire $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$
 \downarrow
 $s_{tot} = s_1 + s_2$
 car s = une composante de \vec{E}

On peut exprimer l'intensité lumineuse résultante :

$$I(M) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{s}_{tot} \cdot \underline{s}_{tot}^*)$$



Soit :

$$I(M) = \frac{1}{2} \text{Re}(s_{o1}^2 + s_{o2}^2 + s_{o1}s_{o2}e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + s_{o1}s_{o2}e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)})$$

$$I(M) = \frac{1}{2} \text{Re}(s_{o1}^2 + s_{o2}^2 + 2s_{o1}s_{o2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1))$$

$$\varphi_2(M) = \varphi_2(S) + \frac{2\pi}{\lambda_o} \mathcal{L}_{SM}^{(2)}$$

$$\varphi_1(M) = \varphi_1(S) + \frac{2\pi}{\lambda_o} \mathcal{L}_{SM}^{(1)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi_2(M) - \varphi_1(M)}_{\text{noté } \varphi} = \frac{2\pi}{\lambda_o} \underbrace{(\mathcal{L}_{SM}^{(2)} - \mathcal{L}_{SM}^{(1)})}_{\text{différence de marche } \delta}$$

Si on bloque le rayon (2), l'intensité en M s'écrit :

$$I_1 = \langle s_1^2 \rangle = \frac{s_{o1}^2}{2}$$

De même, si on bloque le rayon (1) : $I_2 = \frac{s_{o2}^2}{2}$

$$\text{On a ainsi : } \begin{cases} s_{o1} = \sqrt{2I_1} \\ s_{o2} = \sqrt{2I_2} \end{cases} \quad \text{soit } s_{o1}s_{o2} = 2\sqrt{I_1I_2}$$

On établit ainsi la **formule de Fresnel** donnant l'intensité résultant de la **superposition de deux ondes cohérentes** en un point M :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi)$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_o} \delta$$

$$\delta = \mathcal{L}^{(2)}(SM) - \mathcal{L}^{(1)}(SM)$$

Le plus souvent $I_1 = I_2 = I_o$

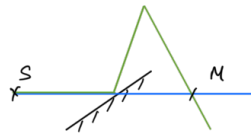
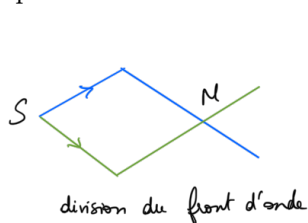
$$I(M) = 2I_o (1 + \cos(\varphi))$$

La superposition en M de deux ondes **cohérentes** conduit à l'observation d'interférences lumineuses : l'intensité en M est différente de la somme des intensités.

Les deux ondes doivent respecter les conditions suivantes :

- ondes issues d'un même point source, correspondant à un même train d'onde ($\delta < \ell_c$) ;
- ondes quasi-synchrone (pulsations ω très proches)

La réalisation pratique peut être réalisée par division du front d'onde ou division d'amplitude :



division
d'amplitude
(cf chapitre 3)

2. Superposition d'ondes non cohérentes

Dans le cas où les deux ondes ne sont **pas cohérentes**, on peut **sommer les intensités** pour obtenir l'intensité résultante :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

Ce sera le cas pour :

- Deux ondes issues de deux points sources indépendants (2 étoiles distinctes, 2 points sources d'une même source étendue ...).
- Deux ondes de pulsations (ou longueurs d'onde) différentes (2 raies distinctes d'une même source, 2 longueurs d'onde différentes au sein d'une même raie de largeur $\Delta\lambda$...).
- Deux trains d'ondes différents même si ils sont issus d'un même point source : la différence de marche δ doit rester inférieure à la longueur de cohérence ℓ_c de la source pour que l'on puisse observer des interférences.

3. Caractéristiques de la figure d'interférence

On introduit deux grandeurs permettant de décrire la figure d'interférence :

- L'**ordre d'interférence** p permet de numérotter les franges observées :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_o} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad p \in \mathbb{N}$$

Lorsque p est entier, l'intensité en M est maximale :

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

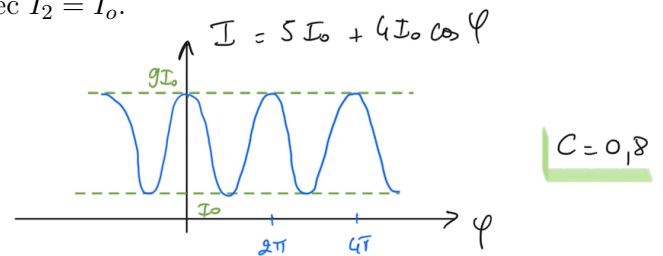
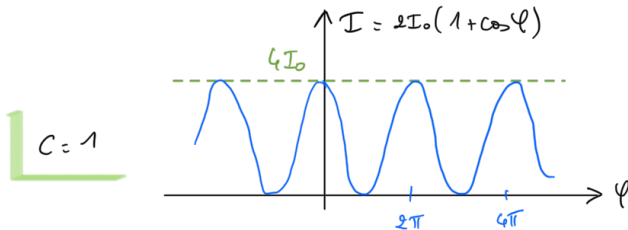
Lorsque p est demi-entier, l'intensité en M est minimale :

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Une variation de p de $1/2$ (c'est-à-dire une variation de δ de $\lambda_o/2$) entraîne le passage d'une frange claire à une frange sombre : les mesures par interférométrie peuvent ainsi être très précises.

Pour que la figure soit visible, l'écart entre deux figures géométriques correspondant aux valeurs p et $p + 1$ doit être suffisamment grand.

- Traçons $I(\varphi)$ pour $I_1 = I_2 = I_o$ et $I_1 = 4I_2$ avec $I_2 = I_o$.



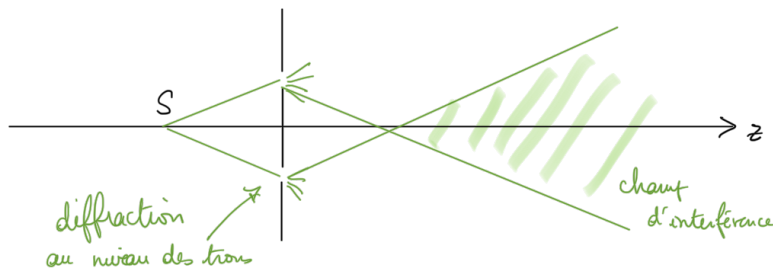
On introduit alors le **contraste** :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

C est compris entre 0 et 1, le **contraste de la figure est maximum** pour :

$$I_1 = I_2 = I_o$$

II. Exemple de dispositif à division du front d'onde : les trous d'Young



deux trous identiques
symétriques par rapport à (S_z)

Il existe une zone, appelée **champ d'interférence**, dans laquelle deux rayons passés respectivement par les trous 1 et 2 se superposent et où on peut observer des interférences. On dit que les interférences sont **non localisées**.

On considère dans ce qui suit que les rayons (1) et (2) ont la même intensité.

L'intensité en un point M du champ d'interférence s'écrit :

$$I(M) = 2I_o \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_o} \delta \right) \right)$$

1. Calcul de la différence de marche

On se place dans le cas où le point source S est sur la médiatrice des deux trous :

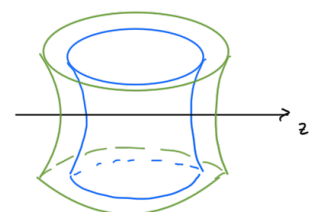
$$\delta = SS_2 + S_2M - (SS_1 + S_1M) \Rightarrow \delta = SS_2 - SS_1$$

Les interférences constructives sont obtenues pour $\delta = p\lambda$ avec p entier. La figure géométrique correspondant à l'équation :

$$S_2M - S_1M = p\lambda_o$$

est un **hyperboloïde de révolution**.

On constate expérimentalement que lorsque l'écran est placé loin de la source, la figure est constituée de franges rectilignes (qui correspondent bien à l'intersection entre un plan et les hyperboloïdes).



$$D \gg (a, x, y)$$

$$\overrightarrow{S_2M} = \left(x + \frac{a}{2}\right) \vec{u}_x + y \vec{u}_y + D \vec{u}_z$$

$$S_2M^2 = D^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2$$

$$S_2M = D \left(1 + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{x^2}{D^2} + \frac{ax}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}\right)^{1/2}$$

$$S_2M \simeq D \left(1 + \frac{a^2}{8D^2} + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{ax}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2}\right)$$

pour $D \gg a, x, y$ M doit être dans le champ d'interférence (écran éloigné)

De même :

$$S_1M \simeq D \left(1 + \frac{a^2}{8D^2} + \frac{x^2}{2D^2} - \frac{ax}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2}\right)$$

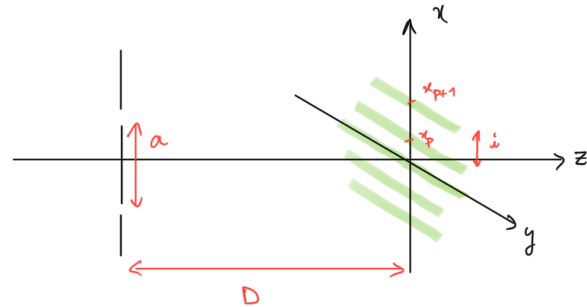
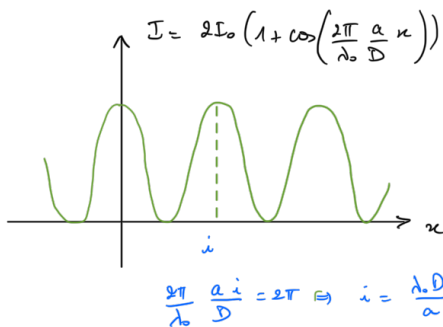
On a ainsi :

$$\delta = S_2M - S_1M \Rightarrow \delta \simeq \frac{ax}{D}$$

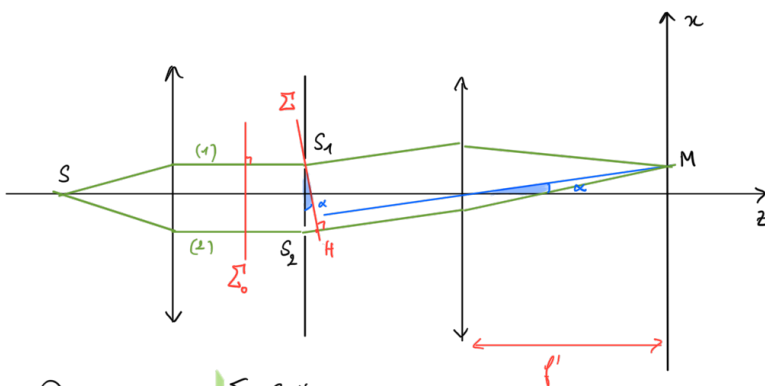
δ constant équivaut à x constant, on observe des **franges rectilignes**.

On passe d'une frange lumineuse à l'autre lorsque δ augmente de λ_0 . On peut déterminer l'expression de l'**interfrange** i correspondant à la distance entre deux franges successives :

$$\begin{cases} \delta = p \lambda_0 & \text{pour } x_p \\ \delta = (p+1) \lambda_0 & \text{pour } x_{p+1} = x_p + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \lambda_0 = \frac{a x_p}{D} \\ (p+1) \lambda_0 = \frac{a (x_p + i)}{D} \end{cases} \text{ soit } \frac{a}{D} i = \lambda_0 \Rightarrow i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$



2. Utilisation d'une lentille : montage de Fraunhofer



On a ainsi : $\delta = S_2H$

Conditions de Gauss

Tige : $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{S_2H}{S_1S_2} \\ \tan \alpha = \frac{x}{f'} \end{cases}$ petits angles $\Rightarrow \begin{cases} \alpha \simeq \frac{\delta}{a} \\ \alpha \simeq \frac{x}{f'} \end{cases}$ soit $\delta = \frac{ax}{f'}$

Théorème de Malus :

Σ_0 = surface d'onde pour le point source S

$$\hookrightarrow L_{SS_1}^{(1)} = L_{SS_2}^{(2)}$$

D'après le principe du retour inverse de la lumière

Σ_1 = surface d'onde pour un point source en M

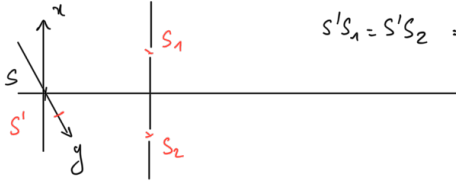
(les rayons issus de M formeraient un faisceau parallèle incliné d'un angle α)

$$\Rightarrow L_{S_1M}^{(1)} = L_{H M}^{(2)}$$

III. Sources réelles

1. Passage des trous d'Young au fentes d'Young

Expérimentalement, il est avantageux d'utiliser des fentes d'Young plutôt que des trous car elles permettent d'avoir une figure plus étendue. En effet, la différence de marche calculée dans le cas des trous ne varie pas si on translate la source suivant \vec{u}_y .



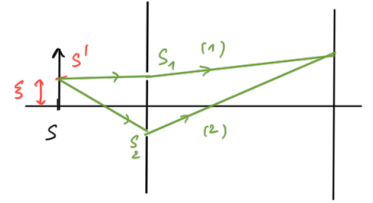
$s'S_1 = S'S_2 \Rightarrow$ déplacer la source en S' ne modifie pas δ

\Rightarrow les figures correspondant à S et S' sont identiques mais translatées par rapport à \vec{u}_y
 \Rightarrow figure + étendue sans perte de contraste.

2. Effet d'un élargissement suivant x

On considère deux points sources S et S' non cohérents :

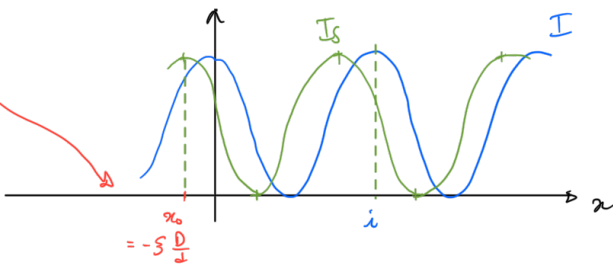
$$\delta = \frac{ax}{D} \Rightarrow I_S = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right)$$



$\delta' = 0$
 pour $x_0 = -\frac{D\xi}{a}$

$$\delta' = \delta + \frac{a\xi}{d} \Rightarrow I_{S'} = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0 D} (x + \xi D/d) \right) \right)$$

L'intensité résultante est la somme des intensités car les deux sources ne sont pas cohérentes. Suivant la valeur de ξ le contraste peut être totalement dégradé.



$$\begin{aligned} I_{\text{tot}} &= 2I_0 \left(2 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta' \right) \right) \\ &= 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\delta + \frac{\delta'}{2} \right) \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\delta' - \delta}{2} \right) \right) \\ \Rightarrow I_{\text{tot}}(x) &= 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a\xi}{2d} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{a\xi}{2d} \right) \right) \right) \\ \begin{cases} I_{\text{max}} = 4I_0 \left(1 + \left| \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a\xi}{2d} \right) \right| \right) \\ I_{\text{min}} = 4I_0 \left(1 - \left| \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a\xi}{2d} \right) \right| \right) \end{cases} \quad C = \left| \cos \left(\frac{\pi}{\lambda_0} \frac{a\xi}{d} \right) \right| \end{aligned}$$

Critère semi-quantitatif :

On observe un brouillage à la position x si les ordres d'interférences associés à S et S' sont décalés de $1/2$:

$$\begin{cases} \delta = p\lambda_0 \\ \delta' = (p + \frac{1}{2})\lambda_0 \end{cases} \Rightarrow \delta' - \delta = \frac{\lambda_0}{2} [n]$$

$$\Rightarrow \frac{a\xi}{d} = \frac{\lambda_0}{2} [n]$$

$$\hookrightarrow \text{brouillage pour } \xi = \frac{\lambda_0 d}{2a} (1+n) \quad \text{entier relatif}$$

le contraste s'annule pour

$$\frac{\pi a \xi}{\lambda_0 d} = \frac{\pi}{2} [n]$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\lambda_0 d}{2a} (1+n)$$

3. Influence de la largeur spectrale

Doublet : on considère dans un premier temps une source comportant deux longueurs d'ondes proches λ_{o1} et λ_{o2} correspondant à des intensités similaires (doublet jaune du sodium ou du mercure par exemple). Il n'y a pas d'interférence entre les rayons correspondant aux longueurs d'onde différentes et on peut écrire :

$$I_{tot}(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

$$I_1(M) = 2I_o \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_{o1}} \delta \right) \right)$$

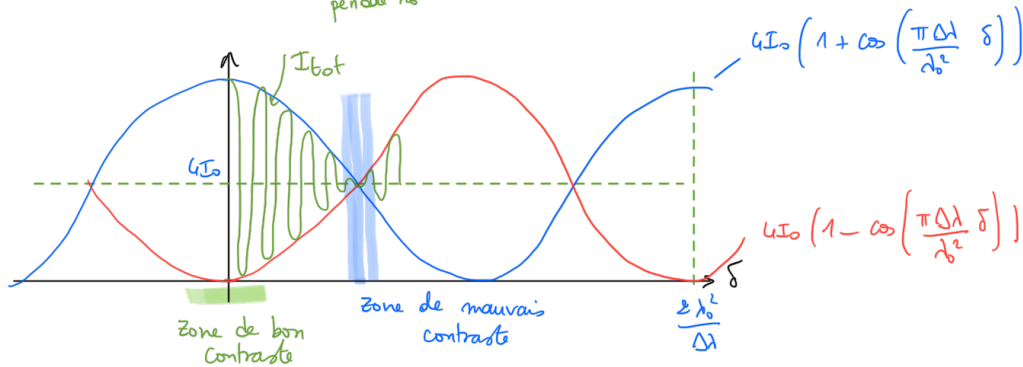
$$I_2(M) = 2I_o \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_{o2}} \delta \right) \right)$$

On obtient :

$$I_{tot} = 4I_o \left(1 + \cos \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda_{o1}} + \frac{2\pi}{\lambda_{o2}} \right) \frac{\delta}{2} \right) \cos \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda_{o1}} - \frac{2\pi}{\lambda_{o2}} \right) \frac{\delta}{2} \right) \right)$$

$\approx \cos \left(\frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda_o^2} \delta \right)$ avec $\Delta \lambda = \lambda_{o2} - \lambda_{o1}$
 période $\frac{2\lambda_o^2}{\Delta \lambda} \gg \lambda_o$

$\approx \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_o} \delta \right)$ avec $\lambda_o = \frac{\lambda_{o1} + \lambda_{o2}}{2}$
 période λ_o



On peut trouver la distance entre deux zones de contraste dégradé en résonnant sur l'ordre d'interférence :

- On considère une valeur δ_o de la différence de marche correspondant à un mauvais contraste. On a alors :

$$p_1 = \frac{\delta_o}{\lambda_{o1}} ; p_2 = \frac{\delta_o}{\lambda_{o2}}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}$$

Le brouillage suivant intervient pour δ'_o avec :

$$p'_1 - p'_2 = \frac{1}{2} + 1$$

On soustrait les deux équations :

$$\delta'_o \left(\frac{1}{\lambda_{o1}} - \frac{1}{\lambda_{o2}} \right) = \frac{1}{2} + 1$$

$$\delta_o \left(\frac{1}{\lambda_{o1}} - \frac{1}{\lambda_{o2}} \right) = \frac{1}{2}$$

Et on obtient :

$$\delta'_o - \delta_o = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

Influence de la largeur spectrale :

On peut généraliser ce résultat au cas d'une source de largeur spectrale $\Delta\lambda$ autour d'une fréquence centrale λ_o . Le contraste reste bon lorsque $|\delta|$ varie sur un intervalle allant de 0 à ℓ_c avec :

$$\ell_c = \frac{\lambda_o^2}{\Delta\lambda}$$