Démonstration de la formule de Fresnel

On considère la superposition en un point M de deux vibrations lumineuses :

$$s_1(M,t) = s_{1o}\cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))$$

$$s_2(M,t) = s_{2o}\cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$$

avec :

$$\varphi_1(M) = \varphi_1(S) + \frac{2\pi}{\lambda_{o1}}\mathcal{L}_{SM}^{(1)}$$

$$\varphi_2(M) = \varphi_2(S) + \frac{2\pi}{\lambda_{o2}}\mathcal{L}_{SM}^{(2)}$$

Exprimer $< s_{tot}^2 >$ et vérifier que le terme d'interférence s'annule si les deux rayons ne sont pas cohérents (on discutera les différents cas possibles).

$$I = \langle s_{o1}^2\cos^2(\omega_1 t - \varphi_1) + s_{o2}^2\cos^2(\omega_2 t - \varphi_2) + 2 s_{o1} s_{o2}\cos(\omega_1 t - \varphi_1)\cos(\omega_2 t - \varphi_2) \rangle$$

$$= \frac{s_{o1}^2}{2} + \frac{s_{o2}^2}{2} + s_{o1}s_{o2}\langle \cos((\omega_1+\omega_2)t - (\varphi_1+\varphi_2))\rangle_\tau + s_{o1}s_{o2}\langle\cos((\omega_2-\omega_1)t - (\varphi_2-\varphi_1))\rangle_\tau$$

D'autre part :

$$\langle \cos(\omega t)\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t_1+\tau}\cos(\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\omega\tau}\underbrace{\left(\sin(\omega(t_1+\tau)) - \sin(\omega t_1)\right)}_{\text{nombre compris entre } -2 \text{ et } 2}$$

$\longrightarrow 0$ si $\omega\tau$ suffisamment grand

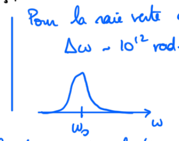
$\tau_{min} \simeq 10^{-9}$ s pour les détecteurs usuels

$$\omega_{visible} = \frac{2\pi \times c}{\lambda_{vis}} \simeq \frac{2\pi\times 3.10^8}{6.10^{-7}} \sim 3.10^{15}\ \text{rad.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle \cos((\omega_1+\omega_2)t - (\varphi_2+\varphi_1))\rangle_\tau = 0$$

$$\langle \cos((\omega_2-\omega_1)t - (\varphi_2-\varphi_1))\rangle_\tau = 0$$

Pour la raie verte du mercure $\Delta\omega \sim 10^{12}$ rad.s^{-1}



Ce terme est nul dès que $\omega_2 \neq \omega_1$

Si $\omega_2 = \omega_1$:

$$\langle \cos((\omega_2-\omega_1)t - (\varphi_2-\varphi_1))\rangle_\tau = \langle \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta + \varphi_2(S) - \varphi_1(S)\right)\rangle_\tau$$

Si (1) et (2) correspondent à des trains d'ondes différents la différence de phase à l'origine varie de façon aléatoire tous les τ_c au cours du temps τ et on a :

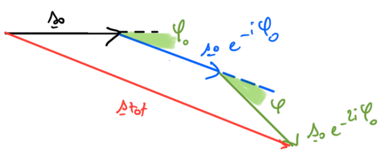
$$\langle \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta + \varphi_2(S) - \varphi_1(S)\right)\rangle_\tau = 0$$

Construction de Fresnel

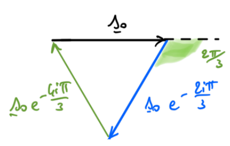
On considère la superposition en un point M de l'espace de N ondes déphasées de φ_o :

$$\underline{s}_{tot} = \underline{s}_o + \underline{s}_o e^{-i\varphi_o} + \underline{s}_o e^{-i2\varphi_o} + \ldots + \underline{s}_o e^{-i(N-1)\varphi_o}$$

Montrer à l'aide de la construction de Fresnel que $\underline{s}_{tot}$ est minimal pour $N\varphi_o = 2\pi$ et maximum pour $\varphi_o = p2\pi$ avec p entier.
On associe pour cela à chaque vibration un vecteur dans le plan complexe de module $|\underline{s}_o|$ et d'argument $-n\varphi_o$.

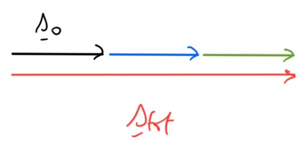


Cas où $N\varphi = 2\pi$ - exemple pour $N = 3$



$$s_{tot} = s_o + s_o e^{-\frac{2i\pi}{3}} + s_o e^{-\frac{4i\pi}{3}}$$
$$= 0$$

$\rightarrow$ minimum d'intensité



Si $\varphi_o = p2\pi$

s_{tot} est maximum

Contraste maximum

Donner l'expression du contraste C dans le cas de l'interférence entre deux ondes telles que :

$$I_2 = \alpha I_1$$

Montrer que C varie entre 0 et 1 et que C atteint un maximum pour $\alpha = 1$.

On écrit la formule de FRESNEL avec $I_2 = \alpha I_1$:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi$$
$$= (1+\alpha) I_1 + 2 I_1 \sqrt{\alpha}\cos\varphi$$

On a ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} I_{max} = (1+\alpha+2\sqrt{\alpha})\, I_1 \\ I_{min} = (1+\alpha-2\sqrt{\alpha})\, I_1 \end{array}\right\} \quad C = \frac{4\sqrt{\alpha}}{2(1+\alpha)}$$

Soit $\boxed{C = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}}$

$$\frac{dC}{d\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(1+\alpha) - 2\sqrt{\alpha}}{(1+\alpha)^2} = \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^2}$$

α	0		1		$+\infty$
$\frac{dC}{d\alpha}$		+	0	−	
$C(\alpha)$	0	↗	1	↘	0

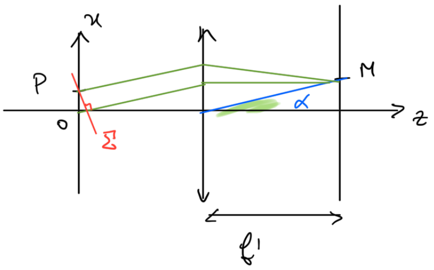
Le contraste est maximum pour $I_1 = I_2$
$C_{max} = 1$

Diffraction de Fraunhofer

Une surface diffractante (Oxy) est éclairée par une onde plane de pulsation ω de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$. L'observation se fait dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f'. En considérant que chaque élément $dxdy$ de l'écran diffractant se comporte comme une source secondaire (comme un trou d'Young dans le cours sur les interférences à 2 ondes), montrer que la vibration lumineuse en un point M de l'écran s'écrit :

$$s_{tot}(x_M, y_M, t) = \iint f(x,y) e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_o}\frac{x.x_M + y.y_M}{f'})} dx.dy$$

La fonction $f(x,y)$ traduisant la transparence de l'écran diffractant.



On fait le raisonnement pour $y=0$, $y_M = 0$ et on généralise ensuite.

P = point de l'écran diffractant

Comme dans le cas des trous d'Young, Σ est une surface d'onde pour un point source en M, la vibration lumineuse du rayon issu de P est déphasée de $\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{a x_M}{f'}$ avec $a = x_P$ par rapport au rayon issu de O.

$$\Rightarrow \underline{s}_P(M,t) = e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}\frac{x_P x_M}{f'}}\, \underline{s}_0(M,t) \times \text{facteur traduisant la transparence en P}$$

vient de

$$\hookrightarrow \underline{s}_{tot} = \int_{P \in \text{surface diffractante}} \underbrace{f(x_P)}_{\text{contient l'amplitude de } \underline{s}_0} e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{x_P x_M}{f'})} dx_P$$

Intérêt du montage à division d'amplitude

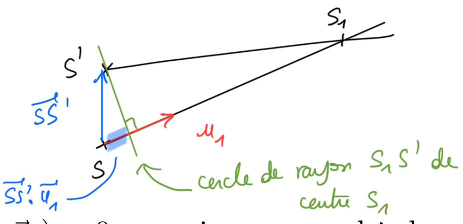
On considère le dispositif des trous d'Young. On cherche à exprimer la variation de la différence de marche lorsque le point source passe d'un point S à un point S' proche de S.

Démo :

$$S'S_2 \simeq SS_2 - \overrightarrow{SS'}.\vec{u}_2$$

$$S'S_1 \simeq SS_1 - \overrightarrow{SS'}.\vec{u}_1$$

$$\Rightarrow \quad \delta' = \delta + \overrightarrow{SS'}.(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$$



La différence de marche ne varie pas (à l'ordre 1) si $\overrightarrow{SS'}.(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = 0$, ce qui correspond à deux situations possibles :

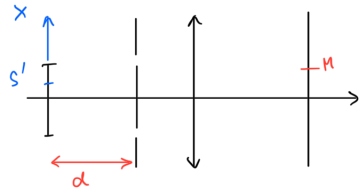
— élargissement de la source dans une direction orthogonale à $\vec{u}_2 - \vec{u}_1$ (division du front d'onde) ;

— Si $\vec{u}_2 = \vec{u}_1$, δ ne varie pas à l'ordre 1 quel que soit la position de S' : c'est l'intérêt des dispositifs à division d'amplitude qui permettent d'augmenter la taille de la source (et ainsi la luminosité de la figure). Cela entraîne par contre une localisation de la figure d'interférence comme nous le verrons dans le chapitre 3.

Source étendue

On considère deux trous d'Young S_1 et S_2 éclairés par une source de largeur b (la source est colinéaire à $\overrightarrow{S_1S_2}$ et possède le même plan médiateur que $[S_1S_2]$).

Déterminer l'éclairement en un point M d'un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente. À quelle condition sur b observe-t-on un bon contraste ? Retrouver ce résultat à l'aide du critère semi-quantitatif.



Pour une source en S' $\quad \delta(M) = \underbrace{\frac{ax}{f'}}_{\text{situation inchangée à droite des trous}} + \frac{aX}{d}$ en considérant $d \gg a, X$

Les rayons issus des différents points constituant la source ne sont pas cohérents $\Rightarrow$ on peut sommer les intensités correspondant aux différents points sources :

$$I = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 2\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{aX}{d} + \frac{ax}{f'}\right)\right)\right) \frac{I_0}{b}\,dX$$

on considère qu'une tranche dX de source émet avec une intensité $\frac{I_0}{b}dX \Rightarrow$ intensité totale I_0.

$$\Rightarrow I = \frac{2I_0}{b}\left(b + \frac{\lambda_0 d}{2\pi a}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ab}{2d} + \frac{ax}{f'}\right)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{f'} - \frac{ab}{2d}\right)\right)\right)\right)$$

$$= 2I_0\left(1 + \frac{\lambda_0 d}{\pi a b}\sin\left(\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{f'}\right)\right)$$

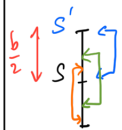
$$= 2I_0\left(1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{f'}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_{max} = 2I_0\left(1 + \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}\right)\right|\right) \\ I_{min} = 2I_0\left(1 - \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}\right)\right|\right) \end{array}\right\} \quad \boxed{C = \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a b}{\lambda_0 d}\right)\right|}$$

$\Rightarrow$ le contraste s'annule pour $\frac{b}{d} = \frac{\lambda_0}{a}$ $\quad (\operatorname{sinc}(\pi) = 0)$

angle sous lequel on voit la source

À l'aide du critère semi quantitatif :



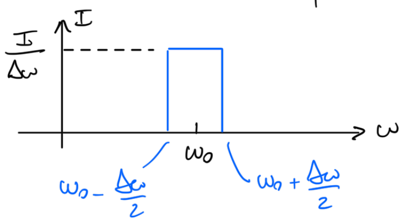
si ces 2 point sources sont en opposition de phase alors on peut séparer la source en un ensemble de points en oppositions de phase

$$\left\{\begin{array}{l} \delta_{S'} = \frac{ax}{f'} + \frac{ab}{2d} = \left(p+\frac{1}{2}\right)\lambda_0 \\ \delta_S = \frac{ax}{f'} = p\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ab}{2d} = \frac{\lambda_0}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{b}{d} = \frac{\lambda_0}{a}}$$

Longueur de cohérence

Le dispositif des trous d'Young est éclairé par une source ponctuelle de longueur d'onde λ_o présentant une largeur de raie $\Delta\lambda$. Déterminer l'intensité lumineuse en fonction de la différence de marche δ.
À quelle condition sur δ observe-t-on un bon contraste ? Retrouver ce résultat à l'aide du critère semi-quantitatif.

On modélise le profil spectral par une raie rectangulaire de largeur $\Delta\omega$ centrée en ω_0



Avec : $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \Rightarrow \Delta\omega = 2\pi c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$

$$\Rightarrow I = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \frac{2I_0}{\Delta\omega}\left(1 + \cos\left(\frac{\omega}{c}\delta\right)\right) d\omega \qquad \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \frac{\omega}{c}\delta$$

$$\Rightarrow I = \frac{2I_0}{\Delta\omega}\left(\Delta\omega + \frac{c}{\delta}\left(\sin\left(\frac{\delta}{c}\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{\delta}{c}\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)\right)\right)\right)$$

$$= 2I_0\left(1 + \frac{2c}{\delta\Delta\omega}\sin\left(\frac{\delta\Delta\omega}{2c}\right)\cos\left(\frac{\omega_0\delta}{c}\right)\right)$$

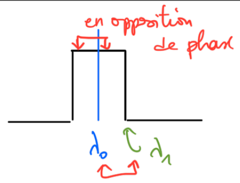
$$= 2I_0\left(1 + \mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2c}\delta\right)\cos\left(\frac{\omega_0}{c}\delta\right)\right)$$

$\Rightarrow$ Le contraste n'est pas uniforme sur la figure (il dépend de δ) : $C = \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2c}\delta\right)\right|$

Le contraste s'annule pour $\delta_{max}\frac{\Delta\omega}{2c} = \pi$

$$\Rightarrow \delta_{max} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta_{max} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = \ell_c}$$

Avec le critère semi-qualitatif :



Si λ_0 et λ_1 sont en opposition de phase à δ fixée alors on peut associer à chaque λ dans $\Delta\lambda$ autour de λ_0 une longueur d'onde donnant un signal en opposition de phase.

On a alors :
$$\left\{\begin{array}{l} \delta = p\lambda_0 \\ \quad = \left(p - \frac{1}{2}\right)\lambda_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\delta}{\lambda_0} = p \\ \frac{\delta}{\lambda_1} = p - \frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \delta\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = \frac{1}{2}$$

On écrit $\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \simeq \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0^2}$ (pour $\Delta\lambda \ll \lambda_0$)

$$\Rightarrow \boxed{\delta_{max} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}}$$