

Mécanique

Chapitre 2 - Changements de référentiels - Mécanique dans $\mathcal{R}$ non galiléen

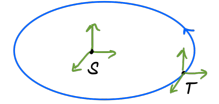
Qu'est-ce qu'un référentiel ?

Dans le premier chapitre, on a vu qu'on pouvait associer un référentiel à un solide en donnant un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au solide et une horloge.

Les référentiels usuels sont :

- Le référentiel de **Copernic** qui a son origine au centre de masse du système solaire, ses axes pointant vers trois étoiles fixes (c'est-à-dire lointaines). *Il est soumis à l'attraction gravitationnelle des autres étoiles de la voie lactée mais reste la meilleure approximation d'un référentiel galiléen pour un observateur lui-même dans le système solaire.* Il permet l'étude du mouvement de planètes autour du Soleil.
- Le référentiel **héliocentrique** (ou référentiel de Képler) qui est en translation par rapport au référentiel de Copernic. Son origine est le centre de masse du Soleil.
- Le référentiel **géocentrique** qui est en translation quasi-circulaire par rapport au référentiel de Copernic, son origine se trouve au centre de la Terre. Ce référentiel est adapté pour l'étude du mouvement des satellites autour de la Terre.
- Le référentiel **terrestre** qui est en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = 2\pi/T$ avec $T = 24\text{h}$ par rapport au référentiel géocentrique.

Lors de l'étude d'un système mécanique, on choisit le référentiel de façon à ce que le mouvement soit simple à décrire.



Translation quasi-circulaire
 $\rightarrow$ l'excentricité de la trajectoire
 Terre vaut 0,016
 ($e=0$ pour une trajectoire circulaire)

Exemple : fusée

- Au moment de la mise à feu de la fusée (voir image ci-contre¹), des gaz sont éjectés à très forte vitesse par les moteurs situés à la base de la fusée. Si on effectue un bilan de quantité de mouvement (voir encadré), on voit apparaître une force de poussée :

$$F = D_m(u - v)$$

qui est à l'origine du décollage de la fusée.

Le terme $u - v$ désigne ici la vitesse des gaz éjectés par rapport à la fusée (ou encore leur vitesse dans le référentiel de la fusée).

- Le lancement de la fusée Ariane 6 a lieu au centre spatial guyanais (CSG) situé en Guyane française. Ce centre présente l'avantage de se situer quasiment à l'équateur ce qui permet de profiter au maximum de la rotation de la Terre sur elle-même au moment du décollage. Pour étudier cet effet, on doit se placer dans le référentiel géocentrique.
- Lors de son trajet dans l'espace, on doit tenir compte de l'influence du Soleil sur la trajectoire de la fusée : on ne peut plus considérer que le référentiel géocentrique est isolée, il faut se placer dans le référentiel héliocentrique (ou dans le référentiel de Copernic).



w = vitesse de la fusée par rapport au sol

u = vitesse du fluide éjecté par rapport au sol

$u - w$ = vitesse du fluide éjecté par rapport à la fusée.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par déterminer les lois permettant d'écrire la vitesse et l'accélération d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}_o$ appelé référentiel absolu à partir des vitesses et accélérations exprimées dans le référentiel relatif $\mathcal{R}$.

On notera $(O_o, \vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o)$ le repère associé à $\mathcal{R}_o$, le point M étant alors repéré par la donnée du vecteur :

$$\overrightarrow{O_o M} = x_o(t)\vec{i}_o + y_o(t)\vec{j}_o + z_o(t)\vec{k}_o$$

1. Lancement de la première Ariane 6 © 2024 ESA-CNES-ARIANESPACE-ARIANEGROUP/Optique vidéo du CSG - S MARTIN d'après le site du CNES.

On notera d'autre part $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère associé au référentiel relatif $\mathcal{R}$, le point M étant repéré par la donnée du vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

En notant $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_o$, on a :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i} ; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j} ; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}$$

Et pour B un point lié au solide $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OB}$$

On utilisera ensuite ces résultats pour écrire les lois de la mécanique dans un référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen.

I. Changement de référentiel

1. Lois de composition des vitesses

Soit M un point matériel dont on étudie le mouvement dans $\mathcal{R}_o$.

La vitesse absolue (c'est-à-dire la vitesse dans le référentiel $\mathcal{R}_o$) s'écrit :

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$$

- $\vec{v}_r$ est la vitesse relative : il s'agit de la vitesse de M par rapport au référentiel relatif $\mathcal{R}$.
- $\vec{v}_e$ est la vitesse d'entraînement : on la définit comme étant la vitesse d'un point P fixe dans $\mathcal{R}$ coïncidant avec le point M à l'instant t .

Exemple :

$\mathcal{R}_o = \text{sol}$

$\mathcal{R} = \text{train}$

→ la vitesse d'un passage par rapport au sol est égale à sa vitesse par rapport au train + la vitesse du train par rapport au sol.

Cas de la translation :

On a alors $\vec{\Omega} = \vec{0}$, tous les points liés au référentiel $\mathcal{R}$ ont la même vitesse $\vec{v}_O$ par rapport à $\mathcal{R}_o$

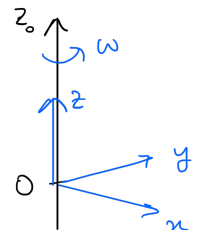
$$\Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_O$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_O$$

Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe :

$$\vec{v}(O) = \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega} = \omega \vec{u}_z$$

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$



Application :

On considère deux solides Σ_1 et Σ_2 en contact ponctuel : les points $I_1 \in \Sigma_1$, $I_2 \in \Sigma_2$ et I coïncident à l'instant t .

La vitesse de glissement de Σ_2 par rapport à Σ_1 s'écrit :

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2}|_{\mathcal{R}} - \vec{v}_{I_1}|_{\mathcal{R}}$$

I_2 et I_1 coïncident à l'instant t , ils ont la même vitesse d'entraînement, **la vitesse de glissement ne dépend donc pas du référentiel choisi**. On écrit souvent $\vec{v}_g$ dans le référentiel lié à Σ_1 :

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2}|_{\Sigma_1} \quad \text{car} \quad \vec{v}_{I_1}|_{\Sigma_1} = \vec{0}$$

2. Composition des accélérations

Cas de la translation :

Dans le cas où le référentiel $\mathcal{R}$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}_o$:

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M)$$

où l'accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{O_o \vec{O}}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}_o}$$

Tous les points de $\mathcal{R}$ ont la même accélération.

Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe :

$$\vec{v}(O) = \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega} = \omega \vec{u}_z$$

Dans le cas où le référentiel $\mathcal{R}$ est en rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_o$:

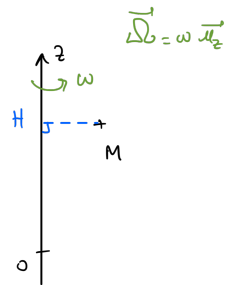
$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

— l'accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

— l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$



Dans le cas général, on écrit :

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

L'accélération de Coriolis a toujours la même expression (on peut vérifier qu'elle est nulle dans le cas d'un mouvement de translation), l'accélération d'entraînement est l'accélération du point P fixe dans $\mathcal{R}$ coïncidant avec le point M à l'instant t .

$\vec{\Omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0}$
pour $\mathcal{R}$ en translation

II. Dynamique dans un référentiel non galiléen

1. Référentiel galiléen

La première loi de Newton postule l'existence de référentiels dits **galiléens** dans lesquels un point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme².

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

Les référentiels usuels peuvent être considérés galiléens ou non suivant les mouvements étudiés.

2. Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen

On considère dans ce qui suit que le référentiel absolu $\mathcal{R}_o$ est galiléen. On peut alors écrire le PFD dans $\mathcal{R}_o$:

$$m\vec{a}_a = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

Imaginons que le mouvement du point M est plus facile à décrire dans le référentiel $\mathcal{R}$ et que l'on souhaite écrire le PFD dans $\mathcal{R}$ qui n'est a priori pas galiléen. On utilise la formule de composition des accélérations :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

On a alors :

$$m\vec{a}_r = \Sigma \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_c - m\vec{a}_e$$

On peut écrire le PFD dans $\mathcal{R}$ non galiléen, à condition de tenir compte des **forces d'inertie** :

- $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ **force d'inertie d'entraînement** ;
- $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c$ **force d'inertie de Coriolis** (avec $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$).

Si $\mathcal{R}$ est en TRU par rapport à $\mathcal{R}_o$: les forces d'inertie sont nulles, $\mathcal{R}$ est également galiléen.

$\vec{f}_{ie}$ et $\vec{f}_{ic}$ sont des "pseudo-forces"
 → leurs effets sont bien réels mais elles ne correspondent pas à des interactions.

On peut également écrire la **loi du moment cinétique** en un point O fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \Sigma \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{OM} \wedge \vec{f}_{ie} + \vec{OM} \wedge \vec{f}_{ic}$$

Ainsi que la **loi de la puissance cinétique** dans $\mathcal{R}$:

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \Sigma \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{ie}$$

La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas, on a en effet :

$$\mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) = -2m(\underbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r}_{\perp \vec{v}_r}) \cdot \vec{v}_r \Rightarrow \mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) = 0$$

2. Il s'agit de la définition d'un référentiel galiléen. Le PFD correspond à la 2ème loi de Newton et le principe de l'action et la réaction à la 3ème loi de Newton.

Remarque importante :

Dans le cas où $\mathcal{R}$ est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω par rapport à $\mathcal{R}_0$, on peut écrire, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r \vec{u}_r$$

On parle de force axifuge ou centrifuge et on remarque :

$$\vec{f}_{ie} = -\frac{d}{dr} \left(-m\omega^2 \frac{r^2}{2} \right) \vec{u}_r$$

On lui associe alors l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

Rappel :

$$F \text{ conservative} \Leftrightarrow \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \mathcal{E}_p \quad \vec{F} = -\text{grad} \mathcal{E}_p$$

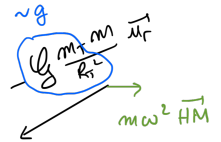
3. Caractère galiléen approché du référentiel terrestre**Définition du poids**

Pour définir le poids d'un corps, on imagine que celui-ci est accroché à un fil. Le poids est alors l'opposé de la tension du fil qui maintient le corps en équilibre.

Si on tient compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre, le poids est alors la somme de la force de gravitation exercée par la Terre et de la force d'inertie d'entraînement (la force d'inertie de Coriolis est nulle si le corps est à l'équilibre car $\vec{v}_r = \vec{0}$). La correction est de l'ordre de 0,3 % :

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\frac{m\Omega^2 R_T}{mg} \simeq \frac{(7,3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{10} = 3 \cdot 10^{-3}$$



Attention ! Lorsqu'on tient compte du caractère non galiléen du référentiel, on ajoute uniquement la force d'inertie de Coriolis. La force d'inertie d'entraînement est prise en compte dans le poids.

Ordre de grandeur de la force de Coriolis sur un exemple :

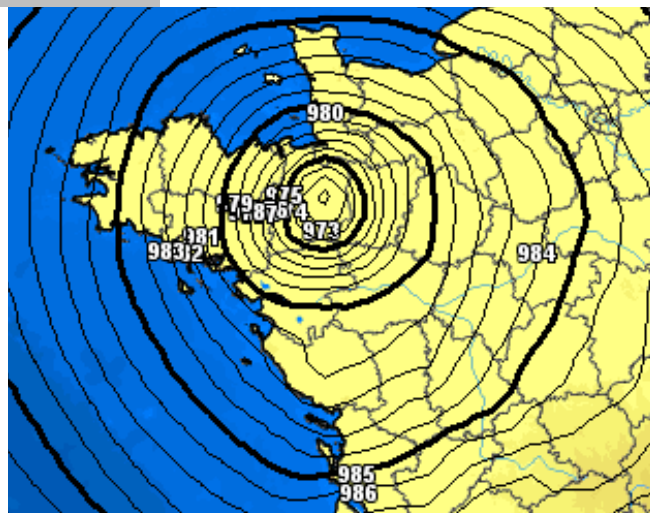
La force d'inertie de Coriolis est proportionnelle à la vitesse relative : ses effets sont d'autant plus importants que la vitesse du système est grande.

Considérons par exemple les mouvements d'air dans l'atmosphère. On peut alors comparer l'ordre de grandeur de la force d'inertie de Coriolis volumique :

$$\vec{f}_{c,v} = -\rho \, 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

et de la force volumique liée aux variations de pression :

$$\vec{f}_{p,v} = -\overrightarrow{\text{grad}} P$$



Pour estimer le gradient de pression, on utilise la figure ci-dessus donnant un extrait de la carte météo le 2 octobre 2020 sur laquelle on a représenté les lignes isobares au niveau de la mer :

$$\|\overrightarrow{\text{grad}} P\| \simeq \frac{5}{100} \text{ hPa.km}^{-1}$$

Dans le cas d'une particule fluide de l'air ayant une vitesse de 100km/h, on aurait :

$$\frac{\|\rho 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r\|}{\|\vec{\text{grad}} P\|} \simeq \frac{1 * 2 * 7.10^{-5} . 100/3,6}{5.10^2/10^5} = 0.8$$

La force de Coriolis n'est pas toujours négligeable dans le cas des flux atmosphériques : elle est à l'origine des cyclones dans lesquels les vents en altitude tournent autour de la zone à basse pression (sens de rotation dépendant de l'hémisphère).

Manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre :

Sur l'exemple précédent, on constate que la force d'inertie de Coriolis doit être prise en compte dans le cas des objets se déplaçant à grande vitesse (particule fluide dans l'atmosphère, TGV ...). On doit également tenir compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre dans le cas de mouvements dont la durée est non négligeable devant $T = 24\text{h}$ comme dans les expériences suivantes :

- Déviation vers l'est de 2,8cm lors de la chute d'une bille d'une hauteur $H = 158\text{ m}$ dans un puits de mines à Freiberg (expérience de Ferdinand Reich en 1833).
- Pendule de Foucault : première démonstration publique en 1851, pendule de 67 m de long, masse de 47 kg, accroché à la voûte du Panthéon à Paris. Le plan des oscillations varie au cours du temps sous l'effet de la force de Coriolis (11° par heure).

De la même façon, le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen pour des expériences dont la durée est faible devant 1 année (idée : *sur un temps court la trajectoire de la Terre peut être considérée comme rectiligne*).

Le phénomène des marées océaniques doit être interprété en tenant compte du caractère non galiléen du référentiel géocentrique.