

Force de poussée

On considère une fusée se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v(t)\vec{u}_z$ verticale par rapport au sol. La propulsion de cette fusée est liée à l'éjection de fluide. On note $\vec{u} = u\vec{u}_z$ la vitesse du fluide éjecté par rapport au sol.

$m(t)$ désigne la masse de la fusée et du fluide qu'elle contient à l'instant t , $m(t+dt)$ est ainsi égale à $m(t) - dm$ avec dm masse de fluide éjectée pendant dt .

1. Montrer que la variation de quantité de mouvement de la fusée (fluide compris) entre les instants t et $t+dt$ s'écrit :

$$\Delta \vec{p} \simeq m(t) \frac{dv}{dt} \vec{u}_z dt + dm(\vec{u} - \vec{v})$$

2. Dans le référentiel terrestre, la loi de la quantité de mouvement pour ce système s'écrit :

$$\frac{\Delta \vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

Montrer que l'écriture de ce résultat fait apparaître un terme :

$$\vec{F} = -D_m(u - v)\vec{u}_z$$

que l'on appelle force de poussée. (D_m désigne le débit massique : $D_m = dm/dt$).

3. Quelle vitesse doit atteindre la fusée pour s'extraire de l'attraction terrestre?

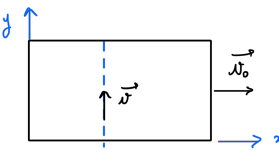
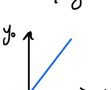
1) À l'instant t : $\vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t)$
 À l'instant $t+dt$:
 $\vec{p}(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)-dm} \vec{v}(t+dt) + \underbrace{dm \vec{u}}_{\text{quantité de mouvement des gaz éjectés}}$
 $\Rightarrow \Delta \vec{p} = m(t) \underbrace{(\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t))}_{\frac{dv}{dt} dt} + dm(\vec{u} - \vec{v})$

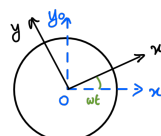
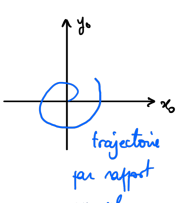
2) $\frac{\Delta \vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}$
 $\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext} - \left(\frac{dm}{dt} (\vec{u} - \vec{v}) \right)$ → vitesse du fluide par rapport à la fusée
 3) Pour s'extraire de l'attraction terrestre, il faut que la force de pesanteur s'annule sur la force de gravitation $\Rightarrow$ le paramètre important est ainsi la vitesse du fluide par rapport à la fusée.
 En 1^{ère} année, on a défini la vitesse de libération comme la vitesse minimale d'un point matériel M pour échapper à l'attraction terrestre (la fusée est un système ouvert qu'on ne peut pas assimiler à un point matériel).
 On écrit $E_m \geq 0$ pour avoir un état libre
 $\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G m M_T}{R_T} = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2G M_T}{R_T}} = \sqrt{2g R_T}$

Exemples d'application de la loi de composition des vitesses

1 - Un passager traverse le wagon d'une fenêtre à celle d'en face dans un train roulant à la vitesse $\vec{v}_0$ par rapport au sol. Quel est sa trajectoire vue du sol?

2 - Un enfant part du centre d'un manège tournant à ω constante pour aller s'asseoir sur un animal situé sur le bord (l'enfant suit un rayon). Quelle est sa trajectoire vue du sol?

1) 
 La vitesse du passager par rapport au train est $\vec{v} = v \vec{u}_y$
 $\Rightarrow$ la vitesse du passager par rapport au sol est ainsi:
 $\vec{v}_{sol} = \vec{v} + \vec{v}_0$
 Si on écrit $\vec{v}_{sol} = x_0 \vec{u}_x + y_0 \vec{u}_y$, on obtient:
 $\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 \\ \dot{y}_0 = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = v_0 t \\ y_0 = v t \end{cases}$
 Soit $y_0 = \frac{v}{v_0} x_0$:  Trajectoire par rapport au sol.

2) 
 Par rapport au référentiel du manège:
 $\vec{v} = v \vec{u}_r$
 Par rapport au sol:
 $\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_e$ avec $\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = \omega \vec{u}_\theta$
 $\Rightarrow \vec{v}_0 = v \vec{u}_r + \omega r \vec{u}_\theta$
 En coordonnées polaires on obtient:
 $\begin{cases} \dot{r} = v \\ r \dot{\theta} = \omega r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = vt \\ \theta = \omega t \end{cases}$
 Trajectoire par rapport au sol.

Démonstration : composition des accélérations

On exprime la vitesse de M dans le référentiel absolu $\mathcal{R}_o$ en faisant intervenir ses coordonnées dans le référentiel relatif. On écrit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_o M} &= \overrightarrow{O_o O} + \overrightarrow{OM} \\ \Rightarrow \overrightarrow{O_o M} &= \overrightarrow{O_o O} + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont liés au référentiel $\mathcal{R}$, ils ne sont pas constants dans $\mathcal{R}_o$:

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\bigg|_{\mathcal{R}_o} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}$$

$\vec{\Omega}$ = vecteur rotation de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_o$.

On obtient la loi de composition des vitesses :

$$\frac{d\overrightarrow{O_o M}}{dt}\bigg|_{\mathcal{R}_o} = \frac{d\overrightarrow{O_o O}}{dt}\bigg|_{\mathcal{R}_o} + \vec{\Omega} \wedge \left(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \right) + \underbrace{\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}}_{\text{vitesse de } M \text{ par rapport à } \mathcal{R}}$$

1. On définit la vitesse d'entraînement comme étant la vitesse du point P fixe dans $\mathcal{R}$, coïncidant avec le point M à t . Commenter cette définition à partir de la formule précédente. On rappelle que les vitesses de deux points A et B liés à un même solide Σ sont liées par la relation :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

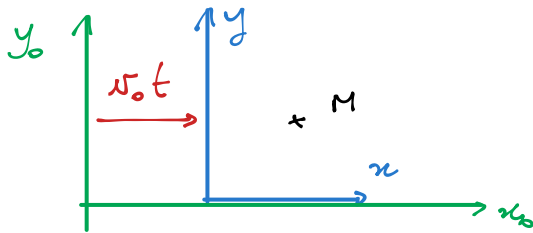
P = point fixe dans $\mathcal{R} \Rightarrow P$ lié au solide $\mathcal{R}$
 $\Rightarrow \vec{v}_P|_{\mathcal{R}_o} = \vec{v}_O|_{\mathcal{R}_o} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}$

2. Établir la loi de composition des accélérations à l'aide de la même méthode dans le cas où le vecteur rotation est constant.

$$\begin{aligned}2) \quad \frac{d^2 \overrightarrow{O_o M}}{dt^2} &= \frac{d^2 \overrightarrow{O_o O}}{dt^2} + \vec{\Omega} \wedge \left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \vec{\Omega} \wedge (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \right) + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \vec{\Omega} \wedge (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) \\ &= \underbrace{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}_{\vec{a}_r = \text{accélération de } M \text{ par rapport à } \mathcal{R}} + \frac{d^2 \overrightarrow{O_o O}}{dt^2} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})}_{\text{correspond au terme } -\omega^2 \overrightarrow{HM}} + \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})}_{\substack{\vec{a}_c \text{ vitesse de } M \text{ par rapport à } \mathcal{R} \\ \text{accélération de Coriolis}}}\end{aligned}$$

Transformation de Galilée

On considère le cas où $\mathcal{R}$ est en TRU à la vitesse $\vec{v}_e = v_o \vec{u}_x$ constante par rapport à $\mathcal{R}_o$.



- Écrire les équations horaires donnant $x_o(t)$ et $y_o(t)$ en fonction de $x(t)$, $y(t)$ et v_o .
- En déduire $\dot{x}_o(t)$ et $\dot{y}_o(t)$ ainsi que $\ddot{x}_o(t)$ et $\ddot{y}_o(t)$. Commenter le résultat.

$$1) \quad \begin{cases} x_o(t) = x(t) + v_o t \\ y_o(t) = y(t) \end{cases}$$

$$2) \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_o = \dot{x} + v_o \\ \dot{y}_o = \dot{y} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{On retrouve la loi de} \\ \text{composition des vitesses.} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_o = \ddot{x} \\ \ddot{y}_o = \ddot{y} \end{cases}$$

L'accélération dans $\mathcal{R}_o$ est égale à l'accélération dans $\mathcal{R}$
 $\Rightarrow$ si on peut écrire la PFD dans $\mathcal{R}_o$, on peut l'écrire dans $\mathcal{R}$ qui est en TRU par rapport à $\mathcal{R}_o$.

Application à l'induction

La définition du vecteur densité de courant $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ fait apparaître la vitesse $\vec{v}$ des porteurs de charge qui dépend du référentiel d'étude. Il faut se placer dans le référentiel d'un conducteur ohmique pour pouvoir écrire la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

On considère ici le cas d'un conducteur en translation à la vitesse $\vec{v}_e$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_o$. On note $\vec{j}_o$, $\vec{E}_o$, $\vec{B}_o$ les grandeurs dans le référentiel $\mathcal{R}_o$ et $\vec{j}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ les grandeurs dans le référentiel du conducteur $\mathcal{R}$.

1. À l'aide de la loi de composition des vitesses et en considérant que le conducteur est globalement neutre, montrer que :

$$\vec{j} = \vec{j}_o$$

2. La force de Lorentz est invariante par changement de référentiel, on a donc :

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}_o + \vec{v}_o \wedge \vec{B}_o$$

En déduire :

$$\vec{B} = \vec{B}_o, \quad \vec{E} = \vec{E}_o + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_o$$

3 - Comment s'écrit la loi d'Ohm locale dans le référentiel $\mathcal{R}_o$ dans ce cas? Le terme supplémentaire permet d'expliquer l'apparition d'un courant induit dans le cas d'un conducteur mobile dans un champ $\vec{B}$.

1) On a $\vec{x}_o = \vec{x} + \vec{x}_e$

$$\vec{j}_o = \sum_i q_i \vec{v}_{oi}$$

on somme sur tous les porteurs de charges

$$= \sum_i q_i \vec{v}_i + \sum_i q_i \vec{v}_e$$

car le conducteur est globalement neutre

$$\Rightarrow \vec{j}_o = \vec{j}$$

2) On considère une charge ponctuelle q de vitesse $\vec{x}_o = \vec{x} + \vec{x}_e$ dans $\mathcal{R}_o$

$$\Rightarrow q(\vec{E}_o + \vec{x}_o \wedge \vec{B}_o) = q(\vec{E} + \vec{x} \wedge \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{E}_o + \vec{x}_o \wedge \vec{B}_o + \vec{x}_e \wedge \vec{B}_o = \vec{E} + \vec{x} \wedge \vec{B}$$

En particulier, pour $\vec{x} = \vec{0}$:

$$\vec{E}_o + \vec{x}_e \wedge \vec{B}_o = \vec{E}$$

On a alors :

$$\vec{E}_o + \vec{x}_o \wedge \vec{B}_o + \vec{x}_e \wedge \vec{B}_o = \vec{E}_o + \vec{x}_e \wedge \vec{B}_o + \vec{x}_o \wedge \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_o \wedge \vec{B}_o = \vec{x}_o \wedge \vec{B} \text{ pour tout } \vec{x}_o$$

$$\Rightarrow \vec{B}_o = \vec{B}$$

3) On écrit la loi d'Ohm locale dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_o \text{ et } \vec{E} = \vec{E}_o + \vec{x}_e \wedge \vec{B}_o$$

$$\Rightarrow \vec{j}_o = \gamma (\vec{E}_o + \vec{x}_e \wedge \vec{B}_o)$$

Forces de marées

On considère un point matériel M de masse m dans le champ de gravitation terrestre. Justifier que le fait de tenir compte du caractère non galiléen du référentiel géocentrique lié au mouvement de la Terre autour du Soleil revient à ajouter une force appelée force de marée :

$$\vec{F} = m (\vec{G}_S(M) - \vec{G}_S(T))$$

avec $\vec{G}_S(T)$ champ de gravitation exercé par le Soleil S au centre de la Terre T .

Le référentiel géocentrique est en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique $\mathcal{R}_o$ et on a :

$$m_T \vec{a}(T)_{\mathcal{R}_o} = m \vec{\mathcal{G}}_S(T)$$

champ de gravitation créé par le Soleil en T

$\mathcal{R}$ en translation $\Rightarrow$ l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ est égale à $\vec{a}(T)_{\mathcal{R}_o} \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{\mathcal{G}}_S(T)$

PPD dans $\mathcal{R}$ non galiléen :

$$m \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \sum \vec{F}_{ext} + m (\vec{\mathcal{G}}_S(M) - m \vec{a}_e) \text{ car } \mathcal{R} \text{ est non galiléen}$$

on ne peut pas négliger l'influence du champ de gravitation créé par le Soleil en M car on en tient compte puis dire que $\mathcal{R}$ est non galiléen

$$\Rightarrow m \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \sum \vec{F}_{ext} + m (\vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(T))$$

terme de marée

PPD si on considère $\mathcal{R}$ galiléen.

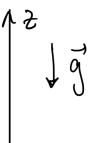
Déviation vers l'est

Afin de vérifier expérimentalement la déviation vers l'Est pour une chute verticale vers le bas, Reich a réalisé une chute libre sans vitesse initiale en laissant tomber un corps dans un puits de mine (afin de s'affranchir de perturbations telles que le vent) de 158 m de profondeur à la latitude $\lambda = 51^\circ$, il a observé une déviation de 2,8 cm vers l'Est.

Dans la suite, on assimile le corps à un point matériel M de masse m et on néglige les frottements.

1. On considère dans un premier temps que le référentiel terrestre est galiléen. Déterminer la vitesse $\vec{v}_o(t)$ du point M ainsi que la durée t_o de la chute (on notera H la profondeur du puits).
2. Utiliser les expressions de $\vec{v}_o$ et t_o pour établir l'expression de la force de Coriolis ainsi qu'une estimation de la déviation de la trajectoire liée à cette force. Commenter. *Remarque : la méthode utilisée est appelée méthode perturbative.*
3. Fallait-il tenir compte de la force d'inertie d'entraînement ?

1)



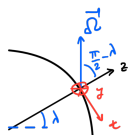
$$m\ddot{z} = -mg \Rightarrow \ddot{z} = -g$$

$$\Rightarrow z = H - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \vec{v}_o(t) = -gt \vec{u}_z$$

$$t_o = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

2)



La force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_o \quad \text{avec } \vec{v}_o = \vec{v}_o$$

$$= 2m\Omega \cos \lambda g t \vec{u}_y$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} \ddot{z} = -g \\ \ddot{y} = 2\Omega \cos \lambda g t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = -gt \\ \dot{y} = \Omega \cos \lambda g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = H - g\frac{t^2}{2} \\ y = \Omega \cos \lambda g \frac{t^3}{3} \end{cases}$$

On peut alors calculer la déviation d à t_o : $d = \frac{1}{3}\Omega \cos \lambda g \left(\frac{2H}{g}\right)^{3/2}$

AN : $d = 2,7 \text{ cm}$ en accord avec l'expérience

3) la force d'inertie d'entraînement est prise en compte dans le poids.

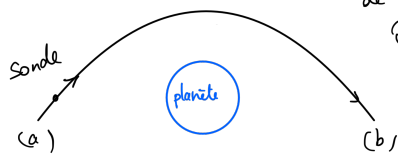
Catapulte gravitationnelle

Extrait du livre *Astronomie et Astrophysique* - M. Seguin, B. Villeneuve ed. Masson

Une sonde qui s'approche d'une planète sur une orbite appropriée peut se servir du champ gravitationnel de la planète pour accroître (ou diminuer) sa vitesse. Ce principe, appelé « effet catapulte », a été exploité notamment par Voyager-2 lors de sa mission d'exploration des quatre planètes géantes du système solaire. La sonde a utilisé chaque planète pour augmenter sa vitesse et se propulser jusqu'à la planète suivante sans avoir à brûler de carburant. Si les planètes étaient immobiles, l'effet catapulte ne pourrait pas fonctionner : une sonde gagnerait de la vitesse en s'approchant de la planète à cause de l'attraction gravitationnelle de celle-ci, mais elle perdrait exactement ce qu'elle a gagné en s'éloignant de la planète.

- 1 - On se place dans le référentiel lié à la planète. À l'aide d'un raisonnement énergétique, vérifier que la sonde sort du champ de gravitation de la planète avec la même énergie cinétique qu'à son arrivée.
- 2 - On se place désormais dans le référentiel de Copernic. Que peut-on dire de la variation de vitesse $\Delta \vec{v}$ de la sonde ? Faire des schémas correspondant aux différents cas possibles.

1)



On se place dans le référentiel de la planète R .

On écrit l'énergie mécanique de la sonde :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmMp}{r}$$

max. planète

coord. polaires car mouvement plan (forces centrales)

Loin de la planète $\frac{1}{r} \rightarrow 0 \Rightarrow E_m = E_c$

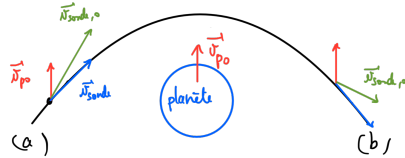
L'énergie mécanique est conservée (force conservative)

$\Rightarrow$ l'énergie cinétique de la sonde est la même en (a) et en (b)

Dans le référentiel héliocentrique, la planète a une vitesse $\vec{v}_p$.

$$\vec{v}_{sonde,p} = \vec{v}_{sonde} + \vec{v}_p$$

intém de la sonde dans le référentiel de la planète



Dans le référentiel héliocentrique, la vitesse de la sonde varie (augmentation ou diminution suivant les configurations)