

Propagation le long d'une corde

On considère une corde de masse linéique λ , confondue au repos avec l'axe (Ox) horizontal. Elle est infiniment souple : la tension $\vec{T}(x_o)$ qui représente la force exercée par la portion de corde $x > x_o$ sur la portion de corde $x < x_o$ est colinéaire à la corde. On néglige les effets de la pesanteur. On note $\psi(x, t)$ le déplacement de la corde à l'abscisse x lors du passage de la vibration. On se place dans le cas des petites déformations.

On note $\alpha(x_o, t)$ l'angle entre $\vec{u}_x$ et $\vec{T}(x_o, t)$, $\alpha \ll 1$.

1. On considère un élément de corde compris entre les abscisses x et $x+dx$ au repos. Montrer que sa longueur $d\ell$ ne varie pas lors du passage de l'onde mécanique et que l'on a :

$$d\ell \simeq dx$$

2. Appliquer le PFD à cet élément de corde. En déduire les équations suivantes :

$$0 = T(x + dx) \cos(\alpha(x + dx, t)) - T(x) \cos(\alpha(x, t))$$

$$\lambda dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T(x + dx, t) \sin(\alpha(x + dx, t)) - T(x, t) \sin(\alpha(x, t))$$

3. Justifier que dans le cas des petites déformations, on a alors :

$$T(x) = T_o$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

avec v une constante homogène à une vitesse à exprimer en fonction de T_o et μ .

OPP solution de l'équation de d'Alembert

Soit un champ électrique $E(x, t) = F(x - ct)$ avec F une fonction quelconque dérivable deux fois. On a :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = F'(x - ct)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c F'(x - ct)$$

Vérifier que $E(x, t)$ est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Une résolution de l'équation de d'Alembert

On pose $u = x - ct$ et $v = x + ct$. On a alors :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

Montrer que ce changement de variable permet d'écrire l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} = 0$$

On a alors :

$$E(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Relation de structure dans le cas d'une onde plane progressive

On se place dans le cas où :

$$\vec{E} = E_y(x - ct)\vec{u}_y + E_z(x - ct)\vec{u}_z$$

$$\vec{B} = B_y(x - ct)\vec{u}_y + B_z(x - ct)\vec{u}_z$$

Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday permet d'écrire :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$$

Relation de dispersion

On considère une OPPM $E(x, t) = E_o \cos(\omega t - kx)$.

À quelle condition sur ω et k est-elle solution de l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Flux de photons

Dans le chapitre 6, on a fait une analogie entre le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et le vecteur densité de courant $\vec{j}$. On peut utiliser cette analogie pour interpréter l'OPPM comme un flux de photons d'énergie $\hbar\omega$ se propageant à la vitesse c . Pour une onde se propageant suivant $\vec{u}_z$ et en notant n le nombre de photons par unité de volume, on peut écrire :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v} \leftrightarrow \vec{\Pi} = n\hbar\omega c\vec{u}_z$$

1. Déterminer $\langle u \rangle$ pour une OPPM polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$, se propageant suivant $\vec{u}_z$.
2. Déterminer également l'expression du vecteur de Poynting moyen $\langle \vec{\Pi} \rangle$ pour cette onde.
3. En déduire le nombre de photons par unité de volume n dans le cas d'un laser He-Ne de puissance 10^3W.m^{-2} pour lequel $\lambda = 632,8 \text{nm}$.

Étude de polarisation

Déterminer les polarisations des ondes électromagnétiques suivantes :

1. Le champ $\vec{E}_1$:

$$E_{1x} = E_o \cos(\omega t - kz) ; E_{1y} = E_o \cos(\omega t - kz + \pi/3)$$

2. Le champ $\vec{E}_2$:

$$E_{2x} = E_o \cos(\omega t + kz) ; E_{2y} = E_o \sin(\omega t + kz)$$

Loi de Malus

Un polariseur est un dispositif permettant d'obtenir une onde électromagnétique polarisée rectilignement. Dans le cas d'une onde se propageant suivant $\vec{u}_z$, si on note x la direction du polariseur, on a pour un champ incident :

$$\vec{E}_i = E_{ix} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{iy} \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{u}_y$$

le champ en sortie du polariseur :

$$\vec{E}_s = E_{ix} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

On considère un champ incident $\vec{E}_i$ polarisé rectilignement. On note θ l'angle entre la direction du champ incident $\vec{E}_i$ et $\vec{u}_x$ la direction du polariseur.

Montrer que le champ en sortie du polariseur vérifie :

$$\| < \vec{\Pi}_s > \| = \cos^2 \theta \| < \vec{\Pi}_e > \|$$

Ce résultat est appelé loi de Malus.