

Problème 1

1 - On considère dans un premier temps un plan infini, confondu avec le plan Oxy , portant la densité surfacique de charge positive σ_o uniforme.

Justifier soigneusement que le champ électrique en un point M de l'espace en dehors du plan s'écrit :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$$

avec $E(z)$ une fonction impaire de z .

2 - Établir l'expression de $E(z)$ pour $z > 0$ et représenter la fonction $E(z)$.

3 - On considère à présent un condensateur plan formé par deux armatures de surface S portant respectivement les charges $+Q$ et $-Q$, distantes de d . Établir l'expression de la capacité C de ce condensateur en négligeant les effets de bords.

4 - Définir le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et donner son unité.

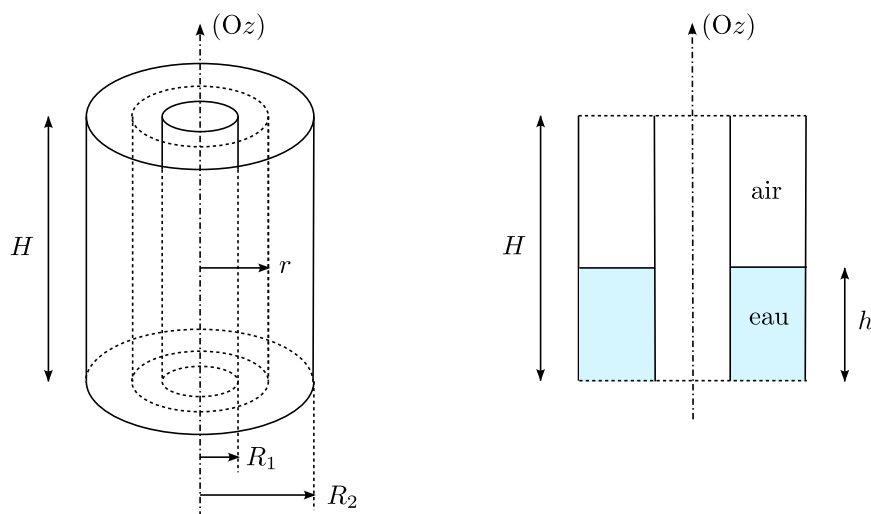
Un cylindre d'axe (Oz) et de section S est parcouru par $\vec{j} = j\vec{u}_z$ uniforme. Quelle est l'expression de l'intensité I du courant à travers le cylindre ?

5 - Énoncer la loi d'Ohm locale. On suppose que le cylindre de la question **4** - est constitué d'un matériau de conductivité γ . Établir l'expression de la résistance d'une section de longueur ℓ de cylindre soumise à une différence de potentiel U .

On étudie dans ce qui suit un capteur de niveau d'eau basé sur une sonde dont les propriétés électriques varient en fonction du niveau d'eau.

La sonde considérée est constituée de deux conducteurs cylindriques coaxiaux d'axe vertical (Oz) , de même hauteur H et de rayons R_1 et R_2 . La sonde est dans un premier temps supposée vide d'eau (dessin de gauche sur la figure ci-dessous). Le milieu entre les deux cylindres est de l'air de conductivité électrique γ_o et de permittivité électrique ε_o assimilée à celle du vide. On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base cylindrique d'axe (Oz) .

On cherche à déterminer la résistance électrique R_o et la capacité C_o entre les deux cylindres.



Afin de déterminer l'expression de la résistance R_o , on suppose qu'un courant permanent d'intensité électrique I circule du cylindre de rayon R_1 vers le cylindre de rayon R_2 . En négligeant les effets de

bord, le vecteur densité de courant électrique entre les cylindres s'écrit sous la forme :

$$\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$$

avec r la distance à l'axe (Oz) et $R_1 < r < R_2$.

6 - Déterminer $j(r)$ en fonction de I , r et H .

7 - On appelle $U = V_1 - V_2$ la tension électrique entre les deux cylindres où V_1 et V_2 sont les potentiels respectifs des cylindres de rayons R_1 et R_2 .

Montrer que $U = R_o I$ en identifiant la résistance électrique R_o en fonction de R_1 , R_2 , H et γ_o .

8 - Afin de déterminer l'expression de la capacité C_o , on suppose maintenant que les deux cylindres sont chargés et constituent les armatures d'un condensateur. Le cylindre intérieur de rayon R_1 porte une charge $Q > 0$ et le cylindre extérieur porte une charge $-Q$, toutes deux uniformément réparties en surface.

En négligeant les effets de bord, établir l'expression du champ électrique $\vec{E}$ présent entre les armatures à une distance r de l'axe (Oz) en fonction de Q , H , ε_o et r .

9 - En déduire l'expression de la capacité C_o en fonction de R_1 , R_2 , H et ε_o .

On considère maintenant la sonde partiellement remplie d'eau sur une hauteur h (figure de droite sur le schéma précédent).

L'eau a pour conductivité γ_{eau} et pour permittivité diélectrique $\varepsilon_o \cdot \varepsilon_r$ où ε_r est la permittivité diélectrique relative de l'eau : en présence d'eau le champ électrique est calculé comme dans le vide mais en remplaçant ε_o par $\varepsilon_o \cdot \varepsilon_r$. On supposera que h et H sont du même ordre de grandeur et on donne :

$$\gamma_o = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{S.m}^{-1} ; \gamma_{eau} = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{S.m}^{-1} ; \varepsilon_r = 80$$

10 - Montrer que la résistance électrique entre les deux cylindres s'écrit sous la forme approchée :

$$R_{sonde} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\gamma_{eau}} \frac{1}{h}$$

11 - Montrer que la capacité entre les deux cylindres s'écrit sous la forme approchée :

$$C_{sonde} = \frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} h$$

Problème 2

Le moteur qui équipe les automobiles thermiques peut être décrit comme une machine ditherme à air (on néglige la quantité de carburant et les gaz brûlés devant l'air au niveau des pistons) fonctionnant de manière pseudo-cyclique (l'air rejeté par la ligne d'échappement n'est évidemment pas le même que celui qui est admis dans le filtre à air, mais il est en même quantité). On caractérise un tel moteur par les températures de la « source froide » T_f (en pratique c'est celle de l'air ambiant et on prendra $\theta_f = 27^\circ \text{C}$) et de la « source chaude » T_c (au moins égale à celle du point le plus chaud du cycle, après la combustion du carburant).

1 - Définir le rendement η d'un tel moteur thermique ditherme.

Énoncer et démontrer avec soin le théorème de Carnot.

Certains véhicules sont mus par un moteur à essence à quatre temps ; le carburant utilisé est de l'Eurosuper 95 produisant, par combustion totale, une énergie $W_v = 3,6 \cdot 10^7 \text{J.L}^{-1}$ (joules produits par litre de carburant consommé).

En circulant à la vitesse stabilisée $v = 100 \text{ km.h}^{-1}$ sur route horizontale, le moteur du véhicule étudié ici développe la puissance $P = 18 \text{ kW}$ (pour vaincre essentiellement les frottements aérodynamiques) et consomme une quantité q égale à 5,4 litres de carburant pour parcourir 100 km.

2 - Dédurre des données ci-dessus le rendement réel η_r du moteur.

Quel inégalité concernant T_c peut-on alors déduire du théorème de Carnot ?

Cette inégalité est-elle vérifiée en pratique sachant que dans le moteur étudié la température est $T_c \simeq 2000 \text{ K}$?

Une quantité donnée de gaz est caractérisée par ses fonctions d'état énergie interne U et enthalpie H et par leurs dérivées :

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v ; C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$$

qui sont les capacités thermiques du gaz. On définit le rapport adiabatique $\gamma = C_p/C_v$; dans ce qui suit γ est supposé constant.

3 - De quel(s) paramètre(s) thermodynamique(s) dépendent les fonctions U et H dans le cadre du modèle du gaz parfait ?

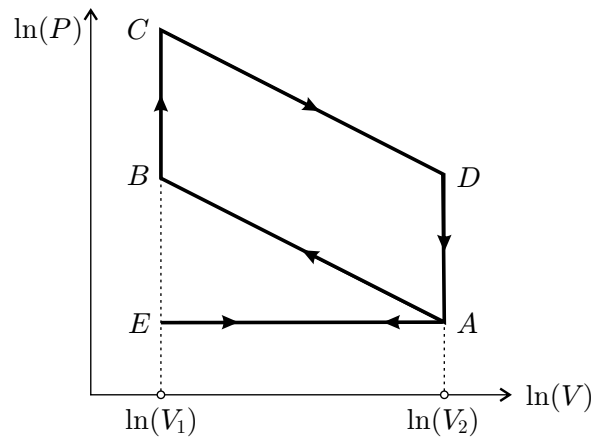
En déduire les expressions de C_p et C_v en fonction du nombre de moles n , du rapport adiabatique γ et de la constante des gaz parfaits R .

On admettra l'expression de l'entropie molaire $S_m(T, V)$ d'un gaz parfait de température T et de volume V :

$$S_m(T, V) = S_m(T_o, V_o) + \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T}{T_o} \right) + R \ln \left(\frac{V}{V_o} \right)$$

4 - En déduire la relation de Laplace qui relie la pression p et le volume V pour une transformation adiabatique depuis un état (p_o, V_o) .

Le moteur à quatre temps a été décrit pour la première fois en 1862 par l'ingénieur Alphonse Beau. Ce cycle est décrit par l'air (pris à l'extérieur à la pression atmosphérique p_o), assimilé à un gaz parfait diatomique, qui évolue entre un volume minimal V_1 et un volume maximal $V_2 = \alpha V_1$ avec le taux de compression $\alpha > 1$. Il est représenté sur la figure ci-après en échelle doublement logarithmique dans le diagramme de Clapeyron.



Cycle moteur de Beau à quatre temps en échelle logarithmique

Ce cycle comporte :

- Une phase d'admission EA de l'air extérieur dans les cylindres du moteur ;
- Une phase de compression adiabatique AB de l'air enfermé dans le piston (mélangé avec un peu d'essence) suivie de la combustion BC quasiment instantanée provoquée par une étincelle produite par le système électrique d'allumage ;
- Une phase motrice de détente adiabatique CD de l'air (et du combustible brûlé) jusqu'à l'ouverture en D des soupapes d'échappement avec chute brutale DA de la pression ;
- Une phase d'échappement AE évacuant les gaz brûlés avant la reprise du cycle.

Dans toute la suite de l'étude les phases d'échappement AE et d'admission EA ne jouent aucun rôle et on pourra donc les ignorer.

5 - On considère d'abord que toutes les évolutions au sein du cycle sont réversibles. Montrer que les transformations AB et CD sont décrites par deux droites parallèles et déterminer leur pente commune $p_{rv} < 0$.

6 - Reproduire sur votre copie la figure du diagramme en échelle doublement logarithmique en y ajoutant les isothermes correspondant aux températures T_f (température la plus basse du cycle) et T_c (température la plus haute du cycle).

7 - Exprimer les transferts thermiques sur les phases AB , BC , CD et DA en fonction des températures T_A , T_B , T_C et T_D aux différents points du cycle.

En déduire l'expression du rendement η_{rv} du rendement de ce cycle moteur en fonction des températures puis en déduire que $\eta_{rv} = 1 - \alpha^{1-\gamma}$.

8 - Pour le moteur étudié ici $\alpha = 9$ et on prendra pour l'air $\gamma = 1,4$. Calculer η_{rv} et commenter.

En réalité l'hypothèse de réversibilité des transformations adiabatiques AB et CD n'est pas réaliste ; pour s'approcher du rendement réel on la remplace par un modèle amélioré, toujours adiabatique mais non réversible, dans lequel le cycle devient $AB'C'D'A$, mais on suppose toujours que AB' et $C'D'$ sont des droites de pentes (négatives) respectives p'_{comp} pour la compression AB' et p'_{det} pour la détente $D'A$.

9 - Montrer à l'aide du second principe que $p'_{comp} < p_{rv} < p'_{det}$.