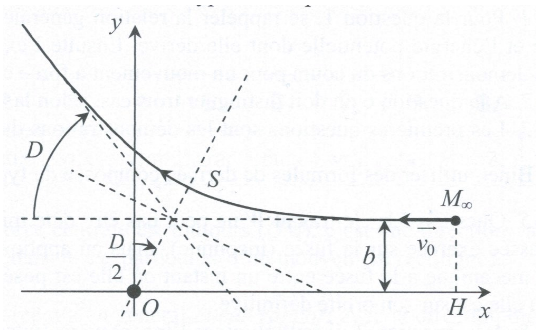
Mécanique - TD5 - Mouvement à force centrale conservative

Exercice 1 - Expérience de Rutherford

Entre 1909 et 1911, Ernest Rutherford et ses deux étudiants Hans Geiger et Ernest Marsden ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α (que Rutherford avait précédemment identifiées comme des noyaux d'hélium). Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées (donc ne "rencontraient" que du vide), mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement : les angles de déviation pouvant être reliés aux dimensions microscopiques, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.

On considère ici une particule α assimilée à un point matériel M de masse m et de charge $2e$ venant de l'infini avec la vitesse $\vec{v_0} = -v_0\vec{u}_x$ et s'approchant avec le paramètre d'impact [1] b d'un noyau cible de numéro atomique Z. Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant centré sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est une branche d'hyperbole représentée ci-dessous.



1. Donner l'expression de la force électrique subie par la particule α sous la forme :

$$\vec{f} = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r$$

2. Justifier que l'énergie mécanique E_m de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur.
3. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ de la particule α par rapport à O est un vecteur constant et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales (*il faut pour cela utiliser le point H*).
4. On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau cible et on note $r_{min} = OS$ la distance minimale d'approche. Pour déterminer l'expression de r_{min}, on utilise la démarche suivante :
   (a) On note $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. Montrer que :

   $$c = r^2\dot{\theta} = bv_o$$

   (b) Comment se simplifie l'expression de la vitesse au point S ? En déduire l'expression de l'énergie cinétique en S en fonction de b, v_o, m et r_{min}.
   (c) En écrivant la conservation de l'énergie mécanique, montrer alors que r_{min} est solution de l'équation :

   $$r_{min}^2 - \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_o m v_o^2} r_{min} - b^2 = 0$$

1. Comme la particule arrive de très loin, on ne décrit pas sa position initiale par la distance OM_∞ mais par b qui permet de voir si la particule se dirige droit sur le noyau ou semble pouvoir passer à côté.

   (d) Résoudre cette équation et exprimer r_{min} en fonction de Z, e, m, v_0 et b.

5. On donne : $\varepsilon_0 = 8,9.10^{-12}\text{F.m}^{-1}$; $e = 1,6.10^{-19}$ C ; $m = 6,610^{-27}\text{kg}$, $v_0 = 2,0.10^7\text{m.s}^{-1}$ et pour l'or Z = 79. D'autre part, on peut montrer que l'angle de déviation D (voir figure) de la particule est donné par :
$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{k}{bmv_0^2}$$
Ce qui donne :
$$r_{min} = b\tan\left(\frac{D}{2}\right) + b\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{D}{2}\right)}$$
Calculer b puis r_{min} pour D_1 =60° et pour $D_2 = 180°$(particule renvoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.

Exercice 2 - Ellipse de transfert vers l'orbite géostationnaire

Un satellite de masse m est en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre assimilée à une sphère homogène de centre C, de rayon $R_T = 6,4.10^3$ km de masse m_T. On note $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$ la norme du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol.

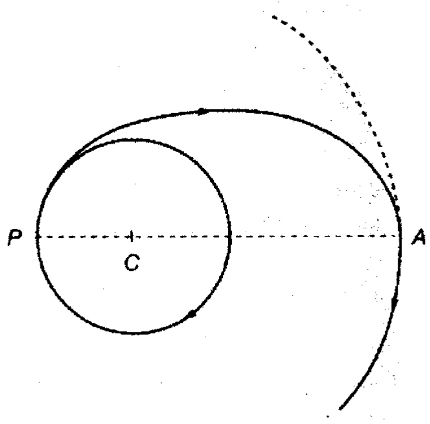
1. En suivant la méthode du cours :
   (a) Justifier que la trajectoire circulaire est uniforme et que :
$$v^2 = \frac{gR_T^2}{R}$$
   (b) En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite :
$$E_m = -\frac{1}{2}mg\frac{R_T^2}{R}$$
   (c) Commenter le signe de E_m.
2. On suppose dans un premier temps que l'orbite circulaire est rasante de rayon $r_1 = R_T$. Déterminer les expressions de sa vitesse v_1 et de sa période de révolution T_1.
3. On suppose dans un second temps que l'orbite circulaire du satellite est telle qu'il semble fixe pour un observateur terrestre (utile pour les transmissions hertziennes). Le satellite est alors dit géostationnaire.
   (a) Expliquer précisément pourquoi la trajectoire du satellite géostationnaire est nécessairement localisée dans le plan équatorial. Donner sa période de révolution T_2.
   (b) En déduire le rayon r_2 de l'orbite géostationnaire puis la vitesse v_2 correspondante. Quelle est l'altitude d'un satellite géostationnaire ?

4. On souhaite désormais faire passer le satellite de l'orbite circulaire rasante de rayon $r_1 = R_T = CP$ à l'orbite géostationnaire de rayon $r_2 = CA$.

   Un moteur auxiliaire permet de modifier localement la vitesse du satellite aux points P et A. Le satellite parcourt alors une demi-ellipse dite de transfert de périgée P et d'apogée A.

   (a) La distance :
   $$a = \frac{AP}{2}$$
   est appelée demi grand-axe de l'ellipse. L'énergie mécanique du satellite sur la trajectoire elliptique est celle qu'il aurait sur une trajectoire circulaire de rayon a. Montrer alors que la vitesse v_1' du satellite en P sur sa trajectoire elliptique vérifie :
   $$v_1' = \sqrt{2g\frac{R_T\ r_2}{R_T + r_2}}$$

   (b) La période T du satellite sur la trajectoire elliptique est égale à celle qu'il aurait sur une trajectoire circulaire de rayon a. En déduire la durée τ du transfert de P à A.



Exercice 3 - Atome d'hydrogène

On étudie cet extrait du concours Centrale PC 2018.

L'atome d'hydrogène, dans son état fondamental, absorbe ou émet un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 21$ cm. Cette transition, appelée raie HI à 21 cm, est celle du maser à hydrogène. Elle est aussi à l'origine du rayonnement émis à cette longueur d'onde par le milieu interstellaire constitutif des galaxies. Après avoir étudié l'origine physique de cette transition, nous verrons l'intérêt d'observer des galaxies dans cette fenêtre de rayonnement.

I La raie HI à 21 cm

Un atome d'hydrogène protoné (isotope ^{1}H dont le noyau est un proton) dans son état fondamental peut absorber un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 21$ cm, c'est ce que l'on appelle usuellement la raie HI à 21 cm. Pour interpréter exactement l'origine de cette raie, il faut mener une étude complète de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la théorie de Dirac (mécanique quantique relativiste).

Nous pouvons cependant comprendre qualitativement l'origine de la raie HI à partir des quelques notions simples évoquées dans ce qui suit.

I.A – Étude classique de l'atome d'hydrogène

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel $\mathcal{R}$ centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel $\mathcal{R}$ sera noté $\vec{L}$.

Q 1. Rappeler l'expression de la force électrostatique $\vec{F}$ s'exerçant sur l'électron.

Q 2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_P de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand $r \to \infty$.

Q 3. Montrer que le mouvement de l'électron est plan.

Q 4. Déterminer l'énergie mécanique E de l'électron et la mettre sous la forme

$$E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + E_{P\,\text{eff}}(r)$$

où $E_{P\,\text{eff}}(r)$ est une fonction de r à expliciter en fonction des paramètres du problème et du moment cinétique orbital $\vec{L}$ de l'électron.

Q 5. Donner l'allure de la représentation graphique de $E_{P\,\text{eff}}(r)$. Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique E et du moment cinétique $\vec{L}$.

Q 6. À quelles conditions (sur L et E) une orbite circulaire est-elle possible ? Calculer le rayon r de l'orbite circulaire et l'énergie mécanique E de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de L, e, m_e et ϵ_0.

Q 7. Dessiner une trajectoire de l'électron si $L = 0$.

I.B – Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle « semi-classique » de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon r et son moment cinétique orbital L est quantifié par

$$L = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

où n est un nombre entier strictement positif et h la constante de Planck.

Q 8. Montrer que les orbites sont quantifiées. Déterminer la valeur du rayon a_0 de la première orbite de Bohr.

Q 9. En déduire que les niveaux d'énergie sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.

Q 10. À quelle température l'énergie d'agitation thermique d'un atome d'hydrogène est-elle comparable à son énergie d'ionisation ? Commenter.