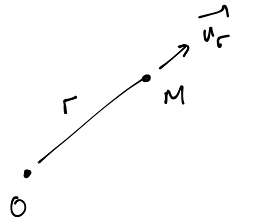
EXERCICE 3



Q.1. $\vec{F} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u_r}$ force de Coulomb.

ici : $q_1 = +e$ charge du proton
$q_2 = -e$ charge de l'électron

La force électrostatique $\vec{F}$ s'exerçant sur l'électron :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u_r}}$$

Q2. $d\vec{OM} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}$ déplacement élémentaire en coordonnées sphériques.

Le travail élémentaire de $\vec{F}$: $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{OM} = -dE_p$

$$\Rightarrow \quad -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = -dE_p \quad \text{soit} \quad \frac{dE_p}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

En intégrant : $E_p = \dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\left(\text{en prenant } E_p \xrightarrow[r\to\infty]{} 0\right)$

Q3 $\vec{F}$ est une force centrale, le théorème du moment cinétique en O centre de force s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OM}\wedge\vec{F}$$
$$= \vec{0} \quad \text{car } \vec{OM} \text{ et } \vec{F} \text{ sont colinéaires.}$$

$\vec{L} = \vec{OM}\wedge m\vec{v}$ est donc constant au cours du mouvement $\Rightarrow$ $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ restent dans un plan orthogonal à $\vec{L}$.

Q4. On utilise les coordonnées polaires de centre O, $\vec{u_z}$ ⊥ plan de la figure

$$\vec{OM} = r\,\vec{u_r} \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \qquad \vec{L} = m r^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$$

L'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\|\vec{L}\|^2}{m r^2}$$

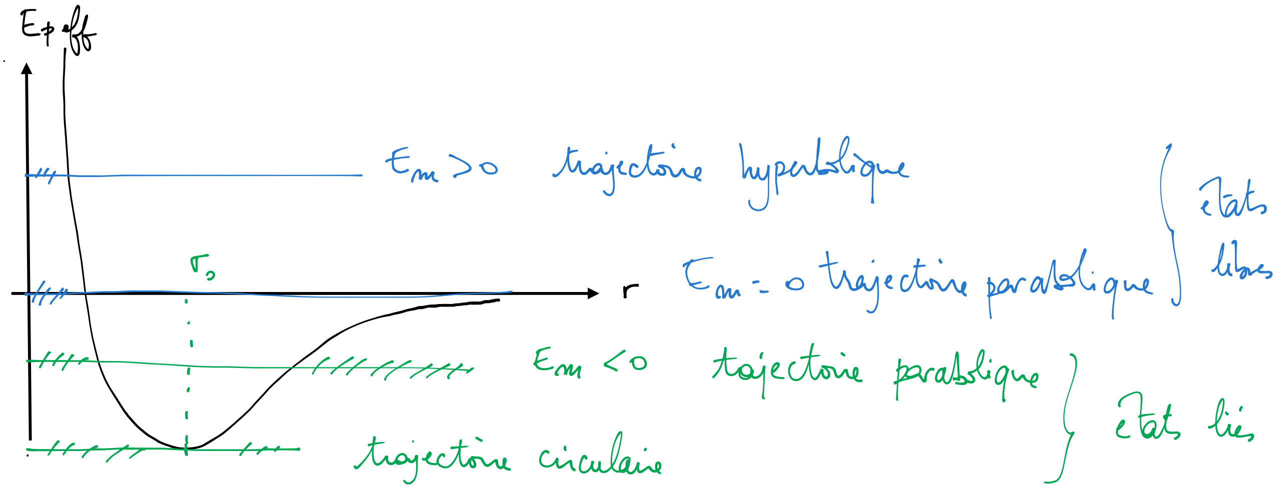
L'énergie potentielle $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

L'énergie mécanique $E = E_c + E_p$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\|\vec{L}\|^2}{m r^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{E_{peff}(r)}$$

Elle est constante au cours du mouvement car $\vec{F}$ est conservative.

Q5.



Q6. La trajectoire circulaire correspond à :

$$\boxed{E = \frac{\|\vec{L}\|^2}{m r_0^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}}$$

On a alors : $r_0^2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 E} r_0 - \frac{\|\vec{L}\|^2}{m E} = 0$

$$\Delta = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}\right)^2 + \frac{4\|\vec{L}\|^2}{m E} > 0 \Rightarrow \text{toujours possible.}$$

On écrit le PFD pour une trajectoire circulaire à v_0 constant :

$$-m\frac{v_0^2}{r} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{avec} \quad L = m r v_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L^2}{m r^3} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{soit} \quad \boxed{r = \frac{L^2\, 4\pi\varepsilon_0}{m e^2}}$$

$$\text{et} \quad E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{m e^2}{L^2 \times 4\pi\varepsilon_0}$$

$$E = -\frac{m e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 L^2}$$

Q7. $L = 0$ correspond à une trajectoire rectiligne ($\vec{OM}$ et $\vec{v}$ colinéaires)

Q8. On a alors $r_n = n^2 \dfrac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m e^2} = n^2 a_0$

$$\text{avec} \quad a_0 = \frac{\hbar^2\, 4\pi\varepsilon_0}{m e^2}$$

Q9. $$E_n = -\frac{m e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 \hbar^2}\,\frac{1}{n^2} = -\frac{R_y}{n^2} \qquad 1\, R_y = 13{,}6\ \text{eV}$$

Q10. $$k_B T = E_1 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{13{,}6 \times 1{,}6.10^{-19}}{1{,}38.10^{-23}} = 1{,}6.10^5\ \text{K}$$

très élevé