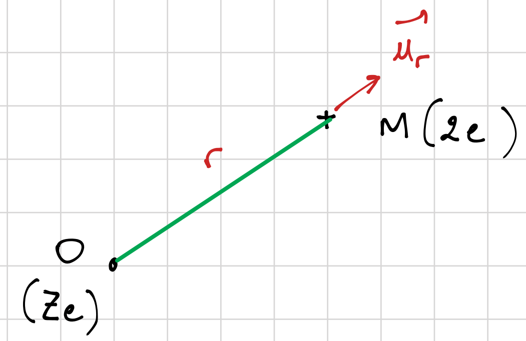
TD 18 _ Mouvement à force centrale conservative

Exercice 1

1)



La force électrostatique subie par M :

$$\vec{f} = \frac{Ze \times 2e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u_r}$$

Soit $\vec{f} = \dfrac{k}{r^2}\,\vec{u_r}$ avec $\boxed{k = \dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}}$

2) La force $\vec{f}$ est conservative. En effet, si on pose $E_p = \dfrac{k}{r}$ on obtient bien :

$\left(E_p = \dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$

$$\vec{f} = -\frac{dE_p}{dr}\,\vec{u_r}$$

M est soumis à $\vec{f}$ conservative, son énergie mécanique est donc constante au cours du mouvement.

Initialement :
$$\begin{cases} r \to \infty & \text{donc } E_{p_0} \to 0 \\ v = v_0 & \text{donc } E_{c_0} = \dfrac{1}{2} m v_0^2 \end{cases}$$

On peut donc écrire $\boxed{E_m = E_{c_0} + E_{p_0} = \dfrac{1}{2} m v_0^2}$

3) On applique la loi du moment cinétique en O point fixe de $\mathcal{R}$:

$$\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f}$$

$\vec{f}$ est une force central de centre O, $\vec{OM} \wedge \vec{f} = 0$ car $\vec{OM}$ et $\vec{f}$ sont colinéaires. On a donc $\dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{0}$

Le moment cinétique en O, $\vec{L}_O(M)$, est donc constant.

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\,\vec{v}(M)$$

$\vec{OM}$ reste orthogonal à $\vec{L}_O(M)$ tout au cours du mouvement et $\vec{L}_O(M)$ a une direction constante : le mouvement a donc lieu dans le plan $\vec{OM}_\infty$, $\vec{v}_0$ (plan orthogonal à $\vec{L}_O$, qui contient le point O)

Initialement,

$$\vec{OM}_\infty = \vec{OH} + \vec{HM}_\infty$$

$$\vec{L}_O(M_\infty) = (\vec{OH} + \vec{HM}_\infty) \wedge m\,\vec{v}_0$$
$$= m\,(\vec{OH} + b\,\vec{u}_y) \wedge (-v_0\,\vec{u}_x)$$

Soit $\boxed{\vec{L}_O(M_\infty) = m\,b\,v_0\,\vec{u}_z}$ car $\vec{OH} \wedge \vec{u}_x = \vec{0}$

4) (a) $\vec{OM} = r\,\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

On peut alors écrire :

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\,\vec{v}$$
$$= m\,r\,\vec{u}_r \wedge (\dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$
$$= m\,r^2\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z$$

On a d'autre part : $\vec{L}_O(M) = m\,b\,v_0\,\vec{u}_z$, on en déduit l'expression de la constante des aires :

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta} = b\,v_0}$$

(b) En S, r est minimum, on a ainsi $\dot{r} = 0$ et $\vec{v} = r_{min}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

Or $\dot{\theta} = \dfrac{b\,v_0}{r_{min}^2} \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{b}{r_{min}}\,v_0\,\vec{u}_\theta$

L'énergie cinétique en S s'écrit donc :

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{b}{r_{min}}\right)^2 v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m b^2 v_0^2}{r_{min}^2}$$

(c) L'énergie mécanique en S est égale à l'énergie mécanique dans l'état initial :

$$\frac{1}{2} \frac{m b^2 v_0^2}{r_{min}^2} + \frac{2 Z e^2}{4 \pi \varepsilon_0 r_{min}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{r_{min}^2} + \frac{Z e^2}{\pi \varepsilon_0 m v_0^2 r_{min}} = 1$$

$\times r_{min}^2$

$$\Rightarrow \boxed{r_{min}^2 - \frac{Z e^2}{\pi \varepsilon_0 m v_0^2} r_{min} - b^2 = 0}$$

(d) $$\Delta = \left(\frac{Z e^2}{\pi \varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 + 4 b^2 = 4 \left(b^2 + \left(\frac{Z e^2}{2 \pi \varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2\right)$$

$$r_{min} = \frac{Z e^2}{2 \pi \varepsilon_0 m v_0^2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{Z e^2}{2\pi \varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2}$$

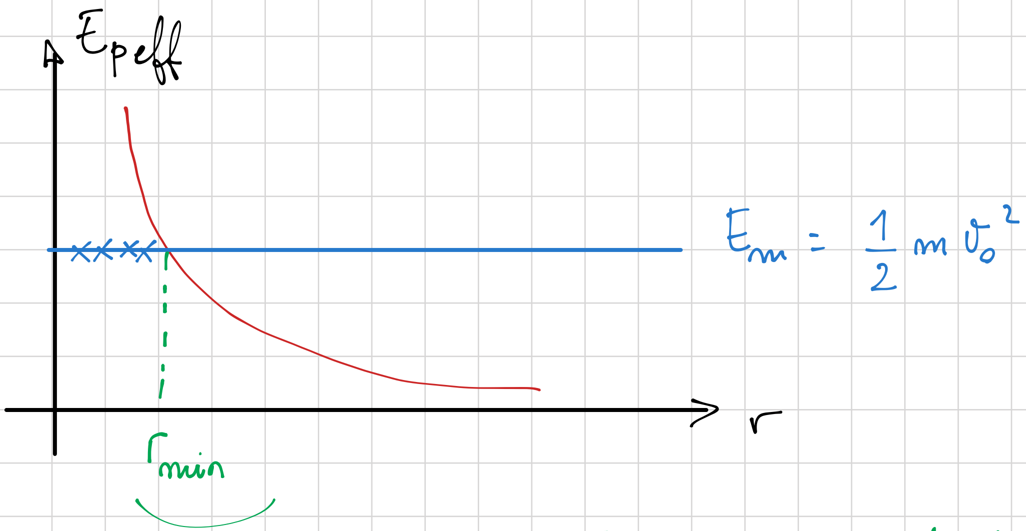
$$> \left(\frac{Z e^2}{2\pi \varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2$$

seule la racine + donne $r_{min} > 0$

($r_{min} < 0$ impossible ici)

Rq : Si on raisonne sur l'énergie potentielle effective comme dans le cours

Rappel : $$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{2 Z e^2}{4 \pi \varepsilon_0 r}}_{E_{p\,eff}(r)}$$



r_{min} correspond au moment où $E_m = E_{peff}$
ce qui indique bien $\dot{r} = 0$ pour $r = r_{min}$

5) On a :

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 b m v_0^2}$$

On vérifie :

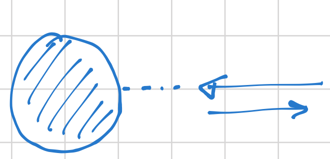
$$r_{min} = \frac{b Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2 b} + \sqrt{b^2 + b^2\left(\frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m b v_0^2}\right)^2}$$

$$r_{min} = b\tan\left(\frac{D}{2}\right) + b\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{D}{2}\right)}$$

A.N : $b = \dfrac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2 \tan\left(\frac{D}{2}\right)}$

$D_1 = 60°$ $\rightarrow$ $b_1 = 2{,}4 . 10^{-14}$ m et $r_{1min} = 4 . 10^{-14}$ m

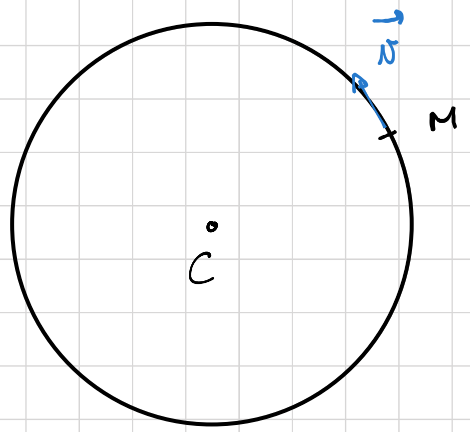
$D_2 = 180°$ $\rightarrow$ $b_2 = 0$ $\left(\tan\left(\frac{D}{2}\right) \rightarrow +\infty\right)$ et $r_{2min} = 2{,}7 . 10^{-14}$ m



Lorsque la particule α arrive dans l'axe du noyau elle s'approche au plus près puis est renvoyée en sens inverse.

Le noyau d'or a un rayon d'environ $2{,}7 . 10^{-14}$ m, c'est un gros noyau (197 nucléons), on a un ordre de grandeur de 10^{-15} m pour les atomes plus légers.

Exercice 2



$\vec{CM} = R\,\vec{u_r}$

$\vec{v} = v\,\vec{u_\theta}$

avec $v = R\dot{\theta}$

$\Big\}\ \vec{L_C}(M) = m R v\,\vec{u_\theta}$

M est soumis à $\vec{F} = -G\dfrac{m M_T}{R^2}\vec{u_r}$

force centrale $\Rightarrow \vec{L_C}(M)$ est constant

$\Rightarrow$ le mouvement est donc circulaire uniforme

$\Rightarrow$ L'accélération $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{R}\vec{u_r}$ $\left(\text{car } R^2\dot{\theta} = \dfrac{v^2}{R}\right)$

Rq : pour $R = R_T$ $\vec{F} = -G\dfrac{m M_T}{R_T^{\,2}}\vec{u_r} = m\vec{g}$

On a donc $\boxed{G M_T = R_T^2\, g}$

PFD

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad -m\frac{v^2}{R} = -m g\frac{R_T^2}{R^2}$$

Soit $\boxed{v^2 = g\dfrac{R_T^2}{R}}$

b) $\vec{F}$ est une force centrale conservative $\left(\vec{F} = -\dfrac{dE_p}{dr}\vec{u_r}\right)$ et l'énergie potentielle associée :

$$E_p = -G\frac{m M_T}{R} = -m\frac{g R_T^2}{R}$$

L'énergie mécanique du satellite sur sa trajectoire circulaire s'écrit donc :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - m\frac{g R_T^2}{R}$$

$$= \frac{1}{2} m g\frac{R_T^2}{R} - m g\frac{R_T^2}{R}$$

Soit $E_m = -\dfrac{1}{2} m g\dfrac{R_T^2}{R}$

c) $E_m < 0$, il s'agit d'un état lié (le satellite reste à une distance finie de la Terre).

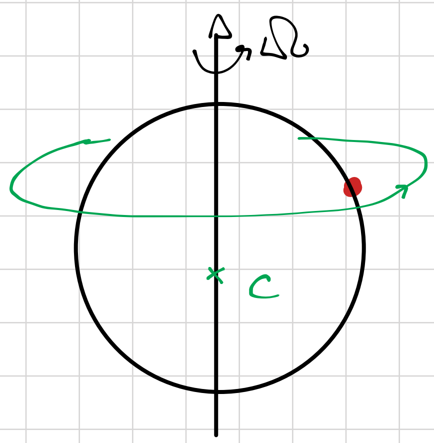
2) Pour $r_1 = R_T$, on obtient $v_1^2 = \frac{g R_T^2}{R_T}$ soit $\boxed{v_1 = \sqrt{g R_T}}$

On a d'autre part :

$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}$ car l'orbite circulaire est décrite avec une vitesse uniforme.

$$\Rightarrow \quad T_1 = \frac{2\pi R_T}{\sqrt{g R_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}}$$

3)



← sur cette trajectoire le satellite resterait bien à la verticale d'un point de la Terre

⇒ le problème c'est que C centre de force doit appartenir au plan du mouvement ⇒ cette trajectoire n'est pas possible (sans apport extérieur d'énergie)

⇒ Un satellite géostationnaire ne peut être que dans le plan de l'équateur.

La période de révolution d'un satellite géostationnaire $T_2 = 24\ h$

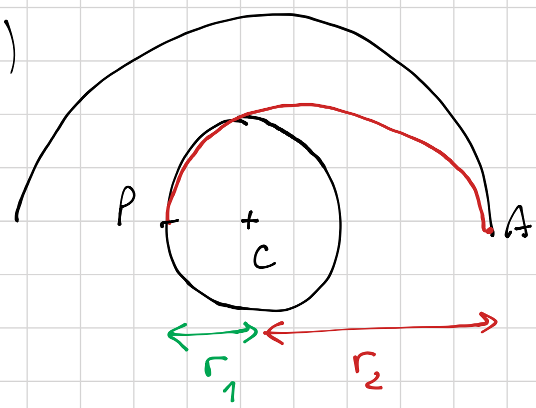
b) $\boxed{v_2^2 = \frac{g R_T^2}{r_2}}$ et $v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T_2^2} r_2^2 = \frac{g R_T^2}{r_2}$

Soit $r_2 = \left(\frac{g R_T^2 T_2^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$

A.N : $r_2 = \left(9{,}8 \times (6{,}4 \cdot 10^6)^2 \times \frac{(24 \times 3600)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4{,}2 \cdot 10^4\ km$

Ce qui correspond à une altitude $h_2 = r_2 - R_T$ de $36 \cdot 10^3\ km$

4) (a)



On observe : $2a = r_1 + r_2$

$\Rightarrow \quad a = \dfrac{R_T + r_2}{2}$ car $r_1 = R_T$

En P sur la trajectoire elliptique : $E_m = -\dfrac{1}{2} m g \dfrac{R_T^2}{a}$

Soit $$\boxed{E_m = - m g \frac{R_T^2}{R_T + r_2}}$$

Et on peut aussi écrire : $E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2} m v_1'^2 - \dfrac{m g R_T^2}{R_T}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_1'^2 = - m g \frac{R_T^2}{R_T + r_2} + m g R_T$$

$$= m g R_T \underbrace{\left(1 - \frac{R_T}{R_T + r_2}\right)} \rightarrow \frac{R_T + r_2 - R_T}{R_T + r_2}$$

$$= m g \frac{R_T r_2}{R_T + r_2}$$

On a bien : $$v_1' = \sqrt{2 g \frac{R_T r_2}{R_T + r_2}}$$

b) On a vu $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{g R_T^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{g R_T^2}$

$$\rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{R_T} \left(\frac{a^3}{g}\right)^{1/2} = \frac{2\pi}{R_T} \left(\frac{(R_T + r_2)^3}{8 g}\right)^{1/2}$$

Le passage P → A correspond à une demi période

$$\boxed{\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{R_T} \left(\frac{(R_T + r_2)^3}{8 g}\right)^{1/2}}$$