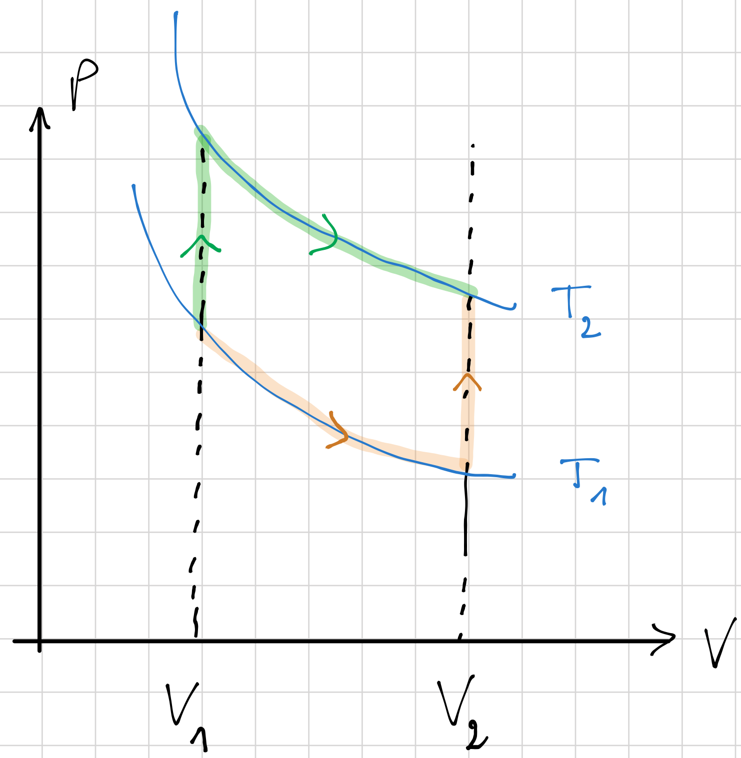
TD 14 _ Premier principe

Exercice 1

1)



isochore : V = constante

$\Rightarrow$ - - - verticale

isotherme : $P = \dfrac{nRT_0}{V}$

$\Rightarrow$ —— hyperbole

—— chauffage isochore puis détente isotherme

—— détente isotherme puis chauffage isochore

2) Premier chemin

chauffage isochore : $W_{1a} = 0$ car $dV = 0$

$Q_{1a} = \Delta U$ (1^{er} principe)

$\Delta U = \frac{5}{2} nR\,\Delta T \longrightarrow Q_{1a} = \frac{5}{2} nR\,(T_2 - T_1)$

détente isotherme : $\Delta U = \frac{5}{2} nR\,\Delta T = 0 \Rightarrow Q_{1b} = -W_{1b}$

$$\delta W = -PdV = -\frac{nRT_2}{V}\,dV$$

on est sur l'isotherme d'équation $P = \dfrac{nRT_2}{V}$

On intègre $\quad W_{1b} = -\displaystyle\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_2}{V}\,dV = -nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

Soit au total : $\begin{cases} Q_1 = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\ W_1 = -nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{cases}$

Deuxième chemin

Détente isotherme $\Delta U = 0$ car $\Delta T = 0$ $\Rightarrow Q_{2a} = -W_{2a}$

$\delta W = -P\,dV$ avec $P = \frac{nRT_1}{V}$ (on est sur l'isotherme T_1)

On intègre $\begin{cases} W_{2a} = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\,dV = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\ Q_{2a} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{cases}$

Chauffage isochore : $W_{2b} = 0$ car $dV = 0$

1er principe $\Delta U = Q_{2b}$

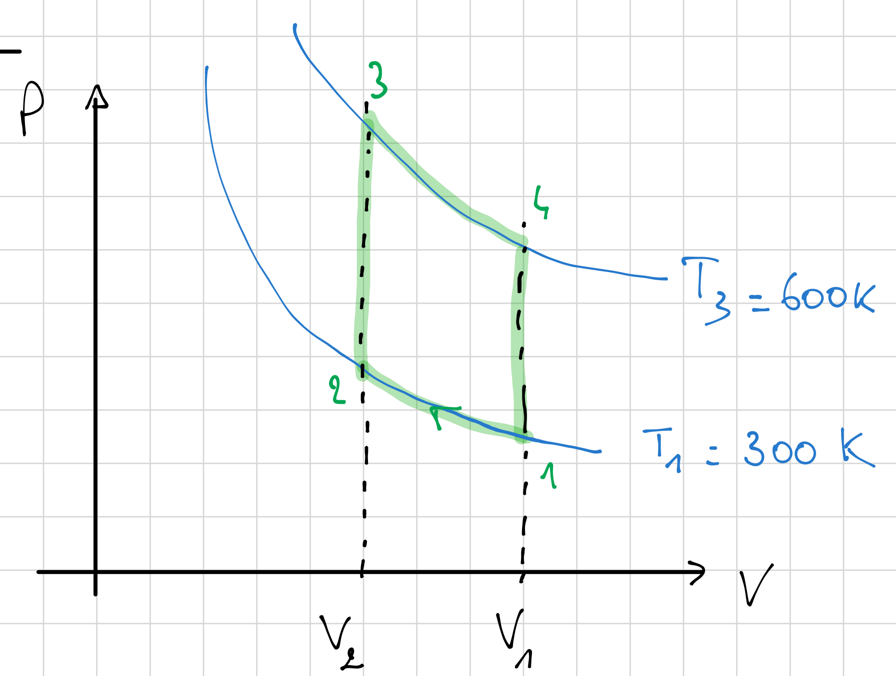
$\Delta U = \frac{5}{2} nR\,\Delta T \Rightarrow Q_{2b} = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1)$

Finalement $\begin{cases} Q_2 = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) \\ W_2 = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{cases}$

3) On retrouve bien $Q_1 + W_1 = Q_2 + W_2 = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1)$

↳ on peut imaginer différents chemins pour aller de l'état initial à l'état final, ΔU ne change pas mais sa répartition en Q et W est modifiée.

Exercice 2



1) La transformation $1 \to 2$ est une compression donc $V_1 > V_2$ et $\rho = \frac{V_1}{V_2} > 1$

2) Isotherme T_1 d'équation $P = \frac{nRT_1}{V}$

Isotherme T_3 d'équation $P' = \frac{nRT_3}{V}$

$\Big\}$ Pour une même valeur de V, $P' > P$ car $T_3 > T_1$

$\rightarrow$ l'isotherme T_3 est bien au-dessus de l'isotherme T_1,

dans les deux cas P en $\frac{1}{V}$ $\Rightarrow$ ce sont des hyperboles

4) La transformation $2 \to 3$ est isochore, on a donc

car $T_2 = T_1$

$$V_2 = \frac{nRT_1}{P_2} = V_3 = \frac{nRT_3}{P_3}$$

Soit $\frac{T_1}{P_2} = \frac{T_3}{P_3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_3 = \frac{T_3}{T_1} P_2}$

5) La transformation $1 \to 2$ est isotherme, le travail élémentaire peut donc s'écrire :

$$\delta W = -P\, dV \quad \text{avec} \quad P = \frac{nRT_1}{V} \qquad (n=1)$$

On intègre $W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} -\frac{nRT_1}{V}\, dV = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

$\rho = \frac{V_1}{V_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{W_{12} = nRT_1 \ln(\rho)}$ > 0 cohérent pour une compression.

Premier principe $\Delta U = Q_{12} + W_{12}$

ici $\Delta U = n C_{vm} \Delta T = 0$ car la transformation est isotherme.

$\Rightarrow Q_{12} = -W_{12}$

	$1 \to 2$	$2 \to 3$	$3 \to 4$	$4 \to 1$
W(kJ)	1,7	0	−3,5	0
Q(kJ)	−1,7	6,3	3,5	−6,3

Le transfert thermique Q_{12} permet de maintenir T constante malgré le travail de compression.

6) La transformation $2 \to 3$ est isochore on a donc $W_{23} = 0$ car $dV = 0$.

On a alors $\Delta U = Q_{23}$ (1er principe)

et $\Delta U = n C_{vm} \Delta T$

$\Rightarrow$ $\boxed{Q_{23} = \frac{5}{2} nR (T_3 - T_1)}$ $(n = 1)$

$Q_{23} > 0$ échauffement du gaz au contact du thermostat à $T_3 > T_1$

7) Comme pour la transformation $1 \to 2$, on a $Q_{34} = -W_{34}$

et $W_{34} = -nRT_3 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) = -nRT_3 \ln \rho < 0$ cette fois (détente)

8) $4 \to 1$ isochore, comme pour $2 \to 3$

$W_{41} = 0$ et $Q_{41} = \frac{5}{2} nR(T_1 - T_3) = -Q_{23}$

$\to$ on complète la dernière colonne

10) $W_{tot} = 1,7 - 3,5 = -1,8 \text{ kJ} < 0$

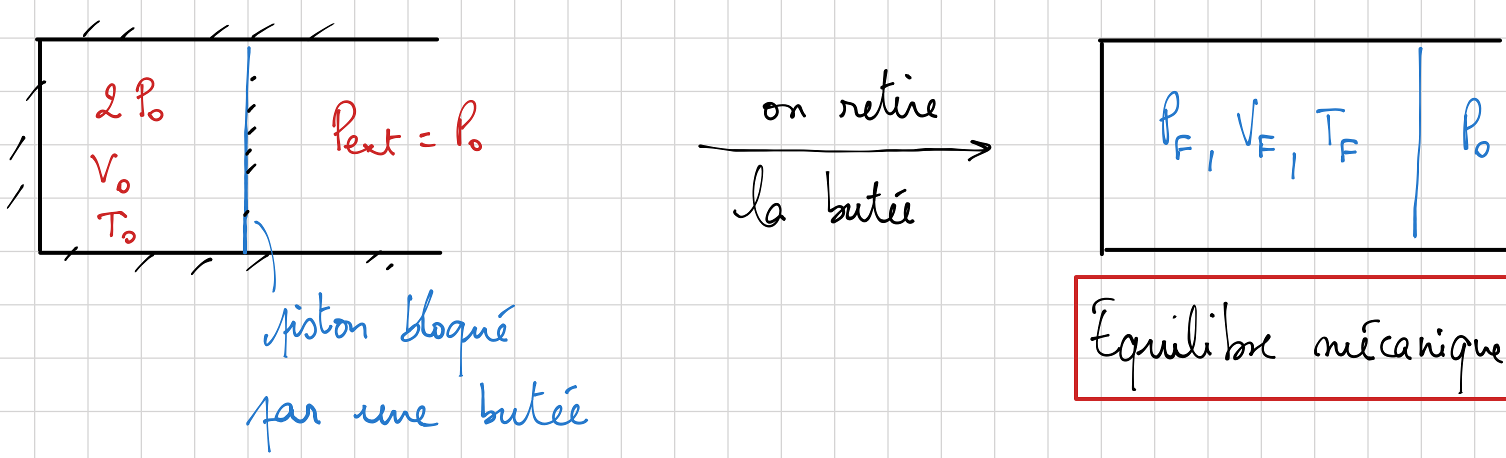
$Q_{tot} = -1,7 + 6,3 + 3,5 - 6,3 = 1,8 \text{ kJ}$

On a bien $W_{tot} + Q_{tot} = 0$

11) $Q_+ = 6,3 + 3,5 = 9,8 \text{ kJ} \Rightarrow r = \frac{1,8}{9,8} \simeq 0,18$

Exercice 3

1)



$\boxed{\text{Équilibre mécanique} \Rightarrow P_F = P_0}$

2) Les parois et piston calorifugés $\Rightarrow Q = 0$

La pression extérieure est constante égale à P_0 :

$\delta W = -P_0 \, dV \Rightarrow W = -P_0 (V_f - V_0)$

On écrit la loi des gaz parfait :

dans l'état initial : $2P_0 V_0 = nRT_0 \Rightarrow P_0 V_0 = \frac{nRT_0}{2}$

dans l'état final : $P_f V_f = nRT_f$

$\Rightarrow$ Le travail $W = -nR\left(T_f - \frac{T_0}{2}\right)$

3) Premier principe $\Delta U = W + Q$ et $\Delta U = \frac{3}{2} nR (T_f - T_0)$

(gaz parfait monoatomique)

On a ainsi :

$$\frac{3}{2} nR (T_f - T_0) = -nR\left(T_f - \frac{T_0}{2}\right)$$

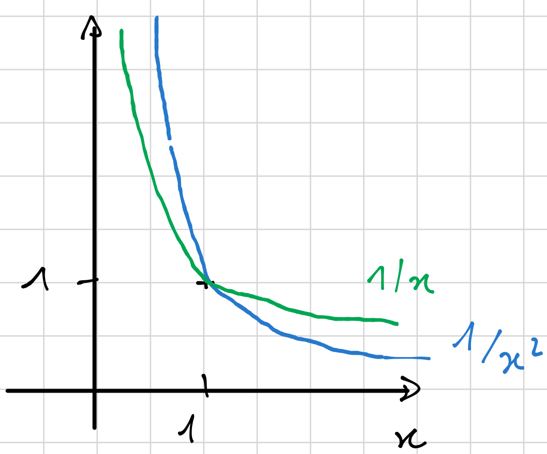
soit $\quad 5\,T_f = 4\,T_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_f = \frac{4}{5}\,T_0}$

On a $\begin{cases} P_0 V_f = \frac{4}{5}\, nRT_0 \\ 2P_0 V_0 = nRT_0 \end{cases} \Rightarrow P_0 V_f = \frac{4}{5} \times 2\, P_0 V_0$

soit $\boxed{V_f = \frac{8}{5}\, V_0}$

EXERCICE 4

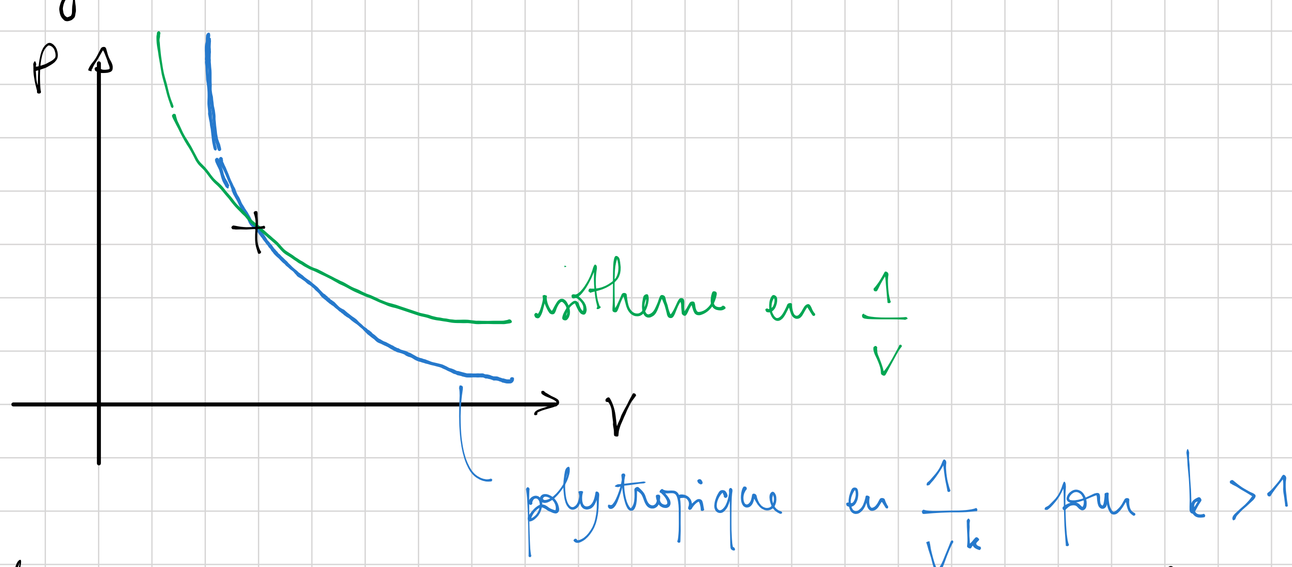
1) Pour vous aider, tracez les fonctions $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$



On veut représenter une isotherme : $P = \frac{nRT_0}{V}$

et une polytropique : $P = \frac{\text{Constante}}{V^k}$ avec $k > 1$

dans un diagramme (P, V) $\Rightarrow$ c'est le même schéma



2) La transformation est mécaniquement réversible donc $P_{ext} = P$

$\Rightarrow$ le travail élémentaire des forces de pression s'écrit

$\delta W = -P\,dV$

$$PV^k = A \Rightarrow P = \frac{A}{V^k} \quad \text{soit} \quad \delta W = -\frac{A}{V^k}\, dV$$

3) On intègre :

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -\frac{A}{V^k}\, dV$$

$$x^2 \to \frac{x^3}{3}$$

$$x^{-k} \to \frac{x^{-k+1}}{1-k}$$

$$= \left[-\frac{A}{1-k} V^{-k+1} \right]_{V_1}^{V_2}$$

$$= \frac{A}{k-1} \left(\frac{1}{V_2^{\,k-1}} - \frac{1}{V_1^{\,k-1}} \right)$$

4) Astuce : $\frac{A}{V_2^{\,k-1}} = \frac{P_2 V_2^{\,k}}{V_2^{\,k-1}} = P_2 V_2$ on écrit $A = P_2 V_2^{\,k}$

$\frac{A}{V_1^{\,k-1}} = \frac{P_1 V_1^{\,k}}{V_1^{\,k-1}} = P_1 V_1$ on écrit $A = P_1 V_1^{\,k}$

On a alors $W = \frac{1}{k-1}\left(P_2 V_2 - P_1 V_1 \right)$

soit $W = \frac{nR}{k-1}\left(T_2 - T_1 \right)$

5) On a :

$\boxed{\begin{array}{l} T_1 = 285\,K \\ P_1 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} T_2 = 362\,K \\ P_2 = 2P_1 \end{array}}$

On écrit $P_1 V_1^{\,k} = P_2 V_2^{\,k}$ et $V = \frac{nRT}{P}$ avec $n = 1$

$$P_1 \frac{R^k T_1^{\,k}}{P_1^{\,k}} = P_2 \frac{R^k T_2^{\,k}}{P_2^{\,k}}$$

soit $P_1^{1-k} T_1^{k} = P_2^{1-k} T_2^{k}$

$$\Rightarrow \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1-k} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{k}$$

On prend le logarithme : $(1-k) \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = k \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}{\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}$$

<u>A.N</u> : $k = 1{,}5$