Elec -TD4 - Filtrage linéaire

Exercice 1 - À propos de l'électro-oculographie

On souhaite mesurer les mouvements de rotation du globe oculaire. Après amplification, les signaux issus des électrodes doivent être filtrés. Le signal utile est compris dans une bande de fréquence allant de 0,001Hz à 10Hz.

1. Combien de décades couvre le signal utile ?
2. Les signaux électro-physiologiques sont également très bruités par des parasites ayant un contenu spectral situé dans les hautes fréquences. Quel type de filtre doit-on utiliser pour améliorer la qualité de ces signaux ?
3. La fonction de transfert du filtre utilisé est :

$$\underline{H} = \frac{H_o}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

avec $x = f/f_o$. On donne :

$$H_o = 1 \ , \ f_o = 15\text{Hz} \ , \ Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(a) Représenter le diagramme de Bode du gain en décibel en fonction de $\log(x)$ en précisant la pente des asymptotes et les résonances éventuelles.

(b) Que vaut le gain pour $f = 50$Hz ? Pourquoi est-il nécessaire d'atténuer fortement cette fréquence ?

(c) Rappeler la définition de la fréquence de coupure à -3dB et la déterminer.

Exercice 2 - Exploitation d'une fonction de transfert

On considère un filtre dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = -\frac{\underline{Z_{eq}}}{R}$$

$\underline{Z_{eq}}$ correspondant à l'association d'une résistance R' et d'un condensateur de capacité C en dérivation.

1. Donner l'expression de Z_{eq}. En déduire l'expression de $\underline{H}$. Quelle est la nature du filtre considéré ? Quel est l'ordre du filtre ?
2. On donne $R = 1\text{k}\Omega$. Comment choisir R' et C pour avoir un gain maximum de 20dB et une fréquence de coupure à 1,6kHz ?
3. On donne :

$$e(t) = 0,4\cos(10^4 t)$$

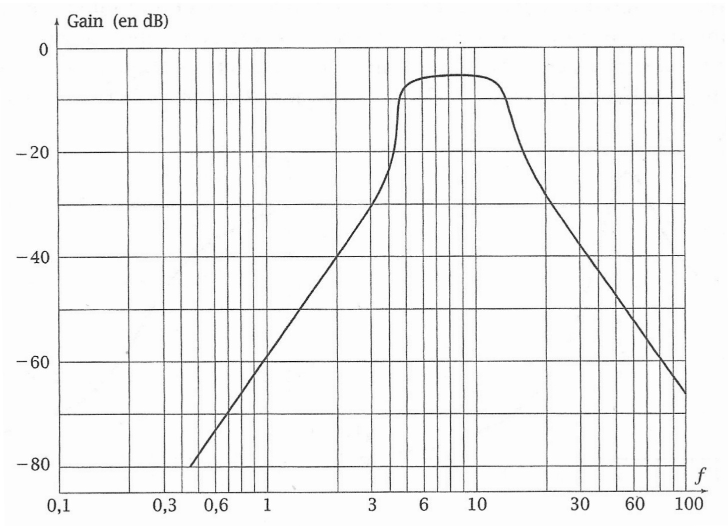
Déterminer $s(t)$. Représenter $e(t)$ et $s(t)$. La tension $s(t)$ est-elle en avance ou en retard par rapport à $e(t)$.

4. Représenter la tension de sortie pour $e(t)$ signal créneau de fréquence 10kHz. Comment qualifie-t-on l'opération effectuée par le filtre ?

Exercice 3 - Filtrage d'un signal créneau

Le diagramme de Bode en amplitude d'un filtre est donné sur la figure ci-après (les fréquences sont données en kHz).

1. Quel est le gain maximal ? En déduire la valeur de la bande passante à -3dB.
2. Quelles sont les pentes des asymptotes ? Quelle est la nature du filtre considéré ?



Exercice 4 - Résonance

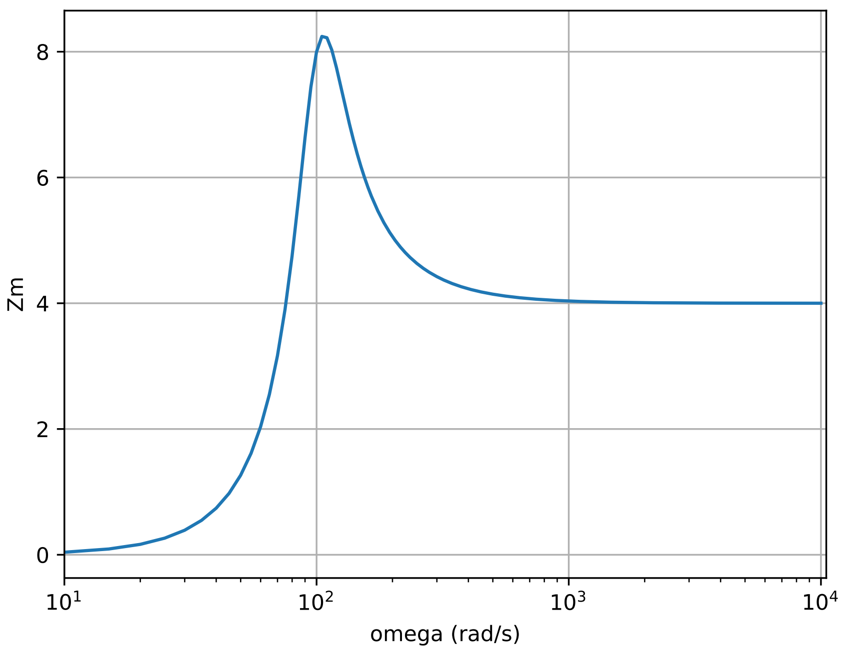
On considère un système mécanique décrit par l'équation différentielle :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{z} + \omega_o^2 z = Z_o \omega^2 \cos(\omega t)$$

On cherche la solution sous la forme : $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi) = Re(\underline{z})$ avec :

$$\underline{z} = \underline{Z}_m e^{i\omega t}$$

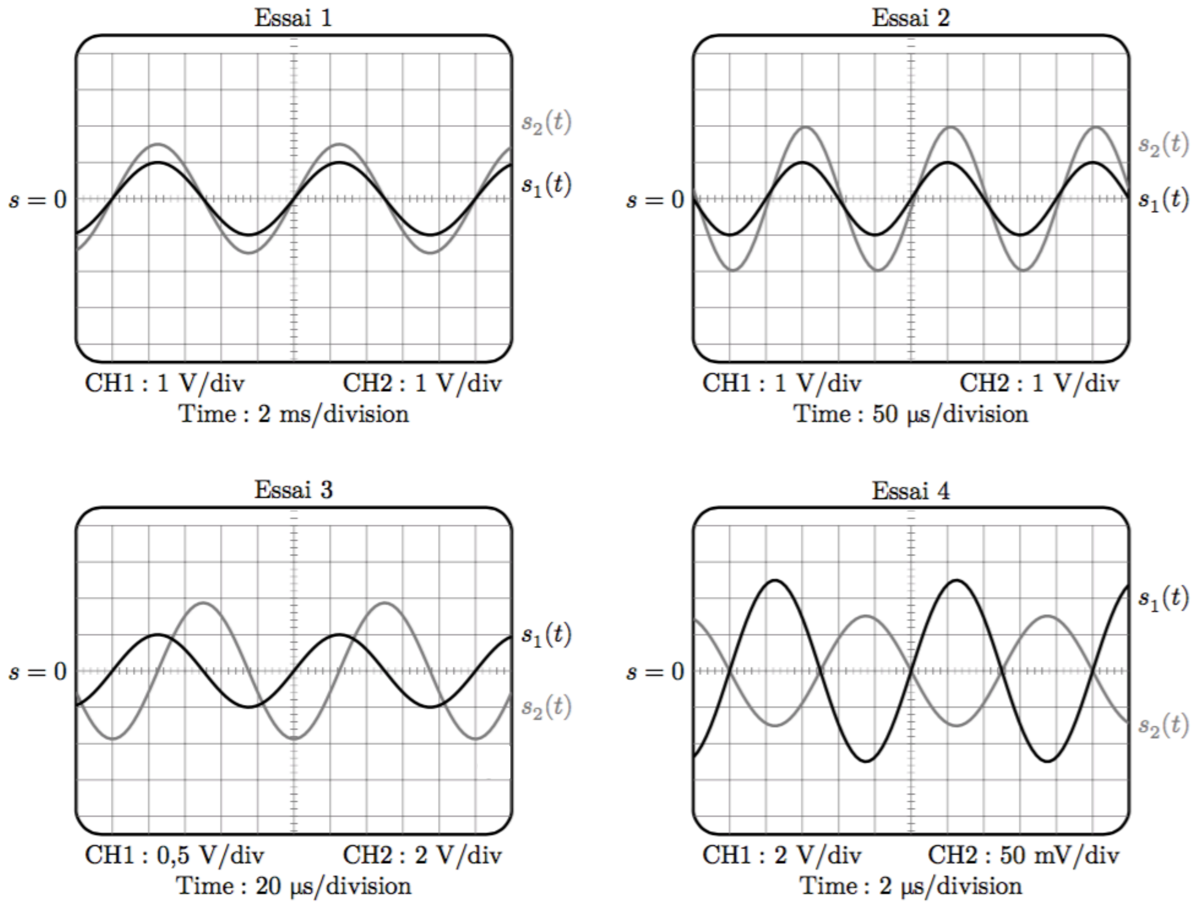
1. Montrer que :
$$\underline{Z}_m = \frac{Z_o}{\frac{1}{x^2} - 1 + i\frac{1}{xQ}}$$
2. On a tracé $Z_m = |\underline{Z}_m|$ en fonction de ω. En déduire les valeurs de Z_o, ω_o et Q.
3. Exprimer $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$.



Exercice 5 - Filtrage d'un signal musical

On souhaite enregistrer un signal musical avec une haute fidélité. Ce signal possède des harmoniques très élevées qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement. Avant l'étape de numérisation, le signal doit donc être filtré. Le document en annexe fournit les spécifications du LMF100 qui est un composant intégré. Il réalise différents types de filtrages selon les branchements qu'on lui applique.

1. Quatre essais ont été réalisés en laboratoire, à quatre fréquences différentes, avec un filtre d'ordre 2 réalisé avec le LMF100. Sur les quatre oscillogrammes relevés (figure ci-après), $s_2(t)$ désigne la tension de sortie du filtre et $s_1(t)$ désigne la tension d'entrée du filtre. Déduire de ces quatre essais la nature du filtre testé, ainsi que ses caractéristiques : fréquence propre f_0, facteur de qualité Q et la (ou les) fréquence(s) de coupure f_c.



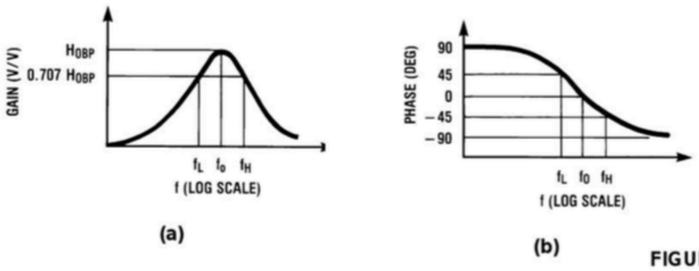
2. On suppose que le filtre d'ordre 2 précédent est alimenté en entrée par la tension :

$$s_1(t) = 4 + 3\cos(2\pi 5000t) + 2\cos(2\pi 10^5 t + \frac{\pi}{4})$$

Représenter le spectre de $s_1(t)$. Déterminer la réponse $s_2(t)$ puis la représenter.

Document : Filtres réalisables avec le LMF100

$$\underline{H}_{BP}(j\omega) = \frac{H_{0BP}\ j\,\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$



$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L};\ f_0 = \sqrt{f_L f_H}$$

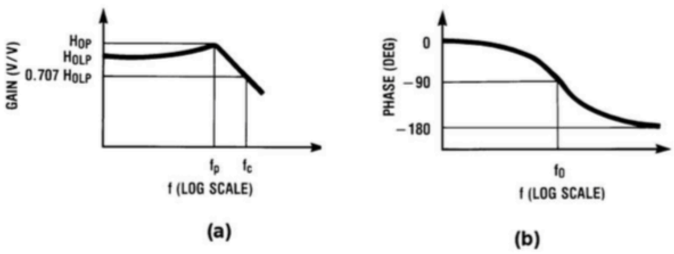
$$f_L = f_0\left(\frac{-1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}\right)$$

$$f_H = f_0\left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}\right)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

FIGURE 1. 2nd-Order Bandpass Response

$$\underline{H}_{LP}(j\omega) = \frac{H_{0LP}\ \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$



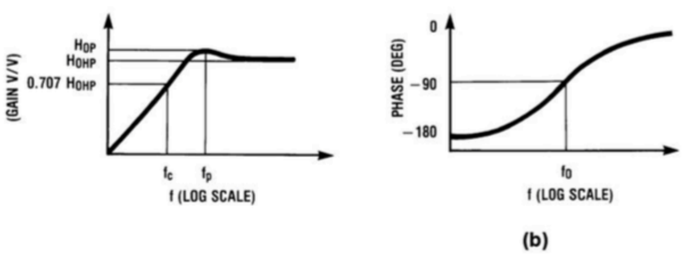
$$f_c = f_0 \times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

$$f_p = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$H_{OP} = H_{OLP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q}\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 2. 2nd-Order Low-Pass Response

$$\underline{H}_{HP}(j\omega) = \frac{H_{0HP}\ (j\omega)^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$



$$f_c = f_0 \times \left[\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}\right]^{-1}$$

$$f_p = f_0 \times \left[\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\right]^{-1}$$

$$H_{OP} = H_{OHP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q}\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 3. 2nd-Order High-Pass Response