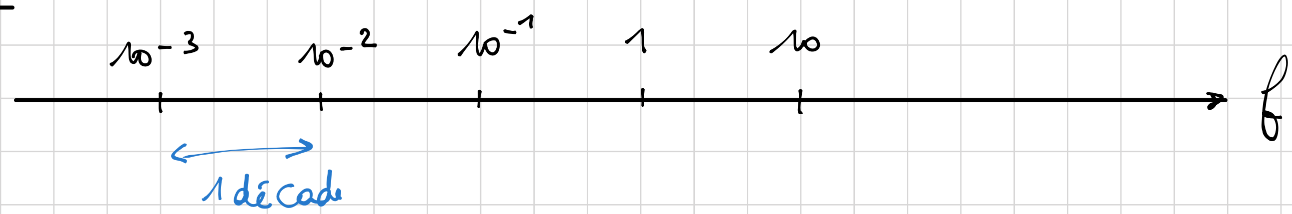
ELEC – TD04 – Filtrage linéaire

Exercice 1

1)



4 décades : $10 = 10^{-3} \times 10^4$

2) Pour éliminer des signaux hautes fréquences il faut un filtre passe-bas de fréquence de coupure supérieure à 10 Hz.

3) $$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\sqrt{2}\,x - x^2}$$ pour $H_0 = 1$ et $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Asymptote à basse fréquence :

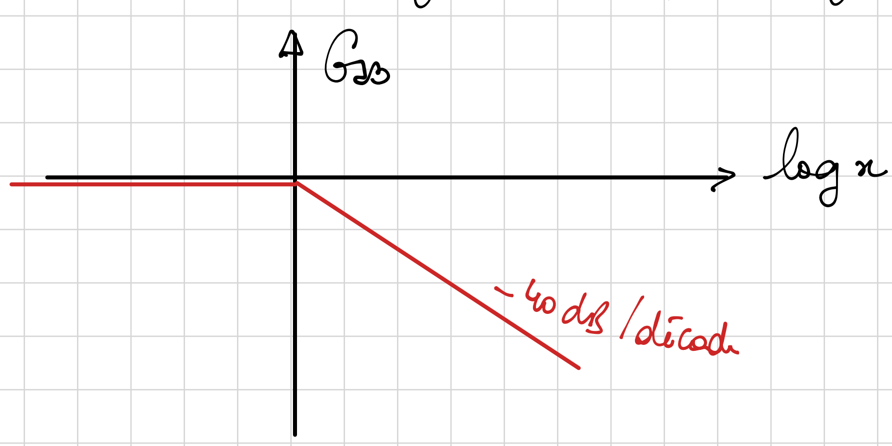
$$\underline{H} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{1} \Rightarrow G_{dB1} = 20 \log(|\underline{H}|) = 0$$ asymptote horizontale

Asymptote à haute fréquence :

$$\underline{H} \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{1}{-x^2} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow G_{dB2} = 20 \log\left(\frac{1}{x^2}\right) = -40 \log x$$

asymptote à -40 dB/décade

Intersection des asymptotes pour $\log x = 0$ $(x = 1)$ et $G_{dB} = 0$



$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 + x^4 + 2x^2}}$$

$$\Rightarrow G = \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}}$$ strictement décroissante $\Rightarrow$ il n'y a pas de résonance.

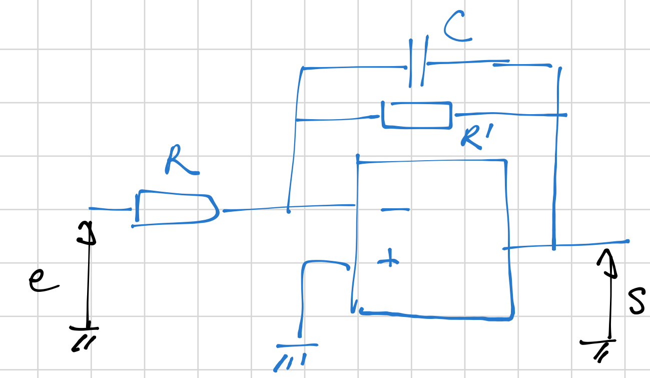
c) La fréquence de coupure à -3 dB correspond $G = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

Ici $G = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ $\Rightarrow$ $G_{max} = 1$ et $G = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}$ pour $x = 1$

$\Rightarrow$ la fréquence de coupure vaut $f_0 = 15$ Hz.

Exercice 2

Rq : ce filtre correspond au montage



1) $$\underline{Z_{eq}}^{-1} = \frac{1}{R'} + jC\omega = \frac{1 + jR'C\omega}{R'}$$

$$\Rightarrow \underline{Z_{eq}} = \frac{R'}{1 + jR'C\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{-\underline{Z_{eq}}}{R} = -\frac{\frac{R'}{R}}{1 + jR'C\omega} = -\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\begin{cases} H_0 = \dfrac{R'}{R} \\ \omega_c = \dfrac{1}{R'C} \end{cases}$$

on pouvait aussi intégrer le $-$ dans H_0

$\boxed{\text{Filtre passe\_bas d'ordre 1}}$

2) $G_{max} = H_0 = \dfrac{R'}{R}$ $\Rightarrow$ $R' = R\,H_0$

$G_{dB\,max} = 20 \log H_0 = 20$ dB $\Rightarrow$ $H_0 = 10$

soit $\underline{R' = 10\ \text{k}\Omega}$

$\omega_c = 2\pi f_c$ $\quad$ A.N : $\omega_c = 2\pi \times 1{,}6 \cdot 10^3 = 10^4$ rad.s^{-1}

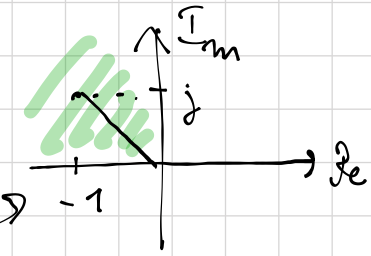
$\omega_c = \dfrac{1}{R'C}$ $\Rightarrow$ $C = \dfrac{1}{R'\omega_c}$ $\quad$ A.N : $C = \dfrac{1}{10^4 \times 10^4} = \underline{10^{-8}\ \text{F} = 10\ \text{nF}}$

3) $e(t) = \underbrace{0{,}4}_{\text{amplitude de } 0{,}4\text{ V}} \cos(\underbrace{10^4}_{\omega = \omega_c}\, t)$

Pour $\omega = \omega_c$: $\underline{H} = -\dfrac{10}{1+j}$ $\Rightarrow$ $G = |\underline{H}| = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = 7$

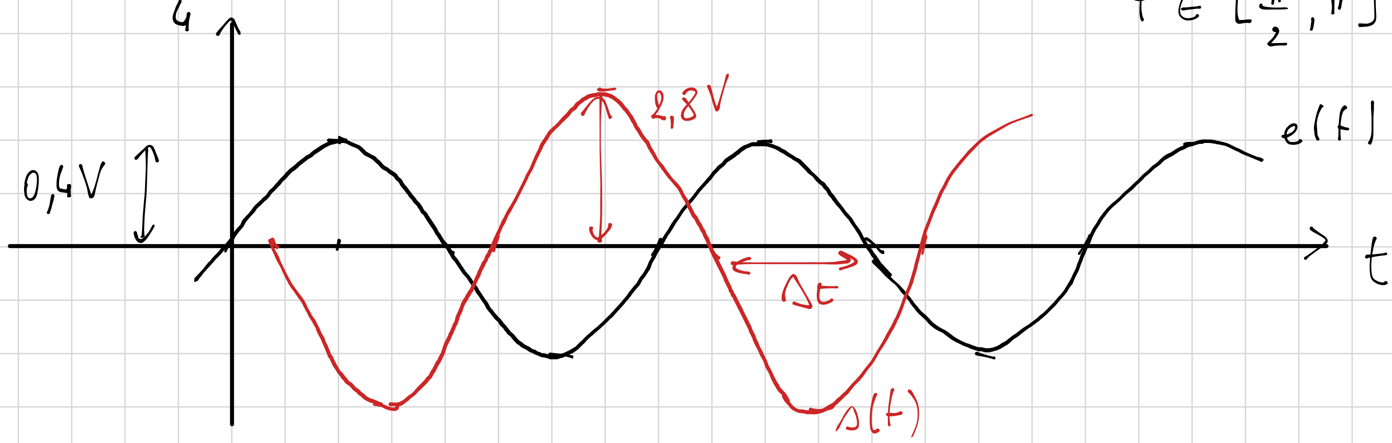
$G = \dfrac{S}{E}$ $\Rightarrow$ $S = G \times E$ soit $\underline{S = 7 \times 0{,}4 = 2{,}8\text{ V}}$

Pour trouver φ on écrit : $\underline{H} = \frac{10}{2} (\underbrace{-1}_{\cos\varphi < 0} + \underbrace{j}_{\sin\varphi > 0})$



$\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$\Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$



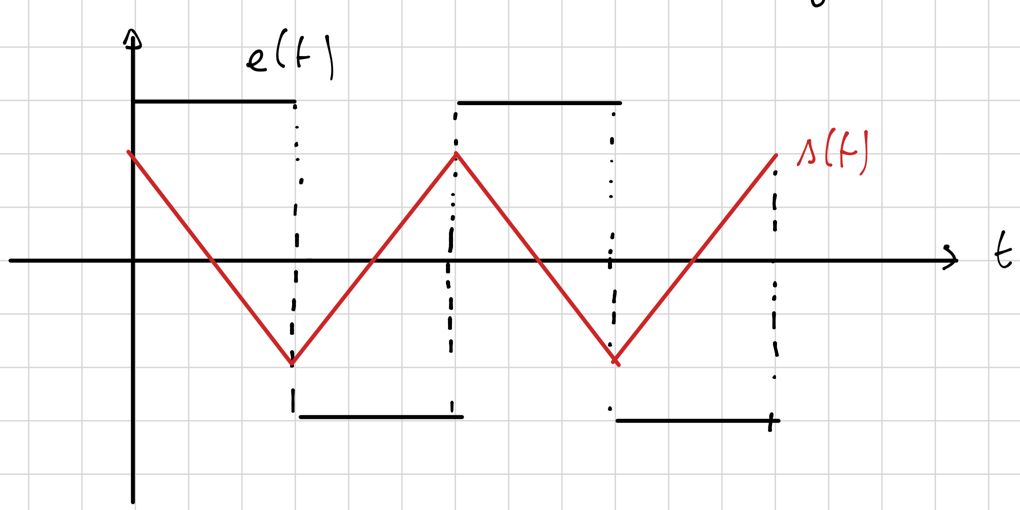
$\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \Delta t = T \frac{\varphi}{2\pi} = T \times \frac{3\pi}{8\pi} = \frac{3}{8} T$

$\Rightarrow$ $s(t)$ est en avance de $\frac{3}{8} T$

4) $f = 10$ kHz $\gg f_c \Rightarrow \underline{H} \simeq \frac{-H_0}{j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{-H_0 \omega_c}{j\omega}$

On a alors : $\underline{s} = -H_0 \omega_c \frac{\underline{e}}{j\omega} \Rightarrow s(t) = -H_0 \omega_c \int e \, dt$

Montage intégrateur



Exercice 3

1) $G_{dB\,max} = -7$ dB

Bande passante à -3 dB $[4,5 \text{ kHz}, 15 \text{ kHz}]$

2) Pente des asymptotes : ± 60 dB / décade

$\Rightarrow \underline{H} \sim \frac{\cdots}{\cdots \omega^3 + \cdots \frac{1}{\omega^3}}$ $\Rightarrow$ filtre passe bande (ordre 6 pour le filtre).

Exercice 4

1) On écrit l'équation complexe associée :

$$\ddot{\underline{z}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{z}} + \omega_0^2 \underline{z} = Z_0 \omega^2 e^{i\omega t}$$

On injecte $\underline{z} = \underline{Z}_m e^{i\omega t}$

$$-\omega^2 \underline{Z}_m e^{i\omega t} + \frac{\omega_0}{Q} i\omega \underline{Z}_m e^{i\omega t} + \omega_0^2 \underline{Z}_m e^{i\omega t} = Z_0 \omega^2 e^{i\omega t}$$

Soit

$$\underline{Z}_m = \frac{Z_0 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{Z_0}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + i\frac{\omega_0}{Q\omega}}$$

Soit en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$\underline{Z}_m = \frac{Z_0}{\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{i}{Qx}}$$ passe haut d'ordre 2.

2) $|\underline{Z}_m| \xrightarrow[x\to+\infty]{} Z_0$ On lit donc $Z_0 = 4$ sur le diagramme

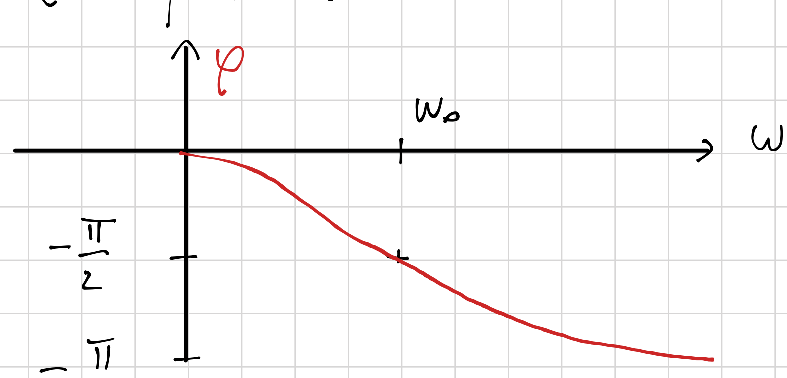
La résonance a lieu pour $x \simeq 1$ et $\underline{Z}_m = \frac{Z_0 Q}{i}$

$\Rightarrow \omega_0 \simeq 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$ et $Z_{m,max} = Z_0 Q \simeq 8 \Rightarrow Q = 2$

3) On écrit : $$\underline{Z}_m = \frac{Z_0}{\left(\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2 + \frac{1}{Q^2x^2}\right)}\left(\frac{1}{x^2} - 1 - \frac{i}{Qx}\right)$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2 + \frac{1}{Q^2x^2}}} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi > 0 & \text{pour } x < 1 \\ \cos\varphi < 0 & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

$$\sin\varphi = \frac{-\frac{1}{Qx}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2 + \frac{1}{Q^2x^2}}} < 0$$



Exercice 5

1)

f	10^2 Hz	5 kHz	10 kHz	100 kHz
G	1,5	2	$\frac{4}{0,5} = 8$	$\frac{0,075}{5} = 0,015$
φ(rad)	0	0	$-\frac{\pi}{2}$ (quadrature)	π (opposition de phase)

$f = \frac{1}{T}$

$G = \frac{S_2}{S_1}$

$\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$

$\Rightarrow$ filtre passe bas avec une résonance (Q assez grand)

$f_0 = 10$ kHz (grâce au déphasage)

$H_{0p} = 8$

$H_{0LP} \simeq 1,5$ (pour 100 Hz)

Si on néglige $\frac{1}{Q^2}$ dans les expressions de f_c, f_p et H_{0p} on peut écrire :

$$f_c \simeq f_0 \sqrt{1+\sqrt{2}} = 1,6 f_0 \Rightarrow f_c \simeq 16 \text{ kHz}$$

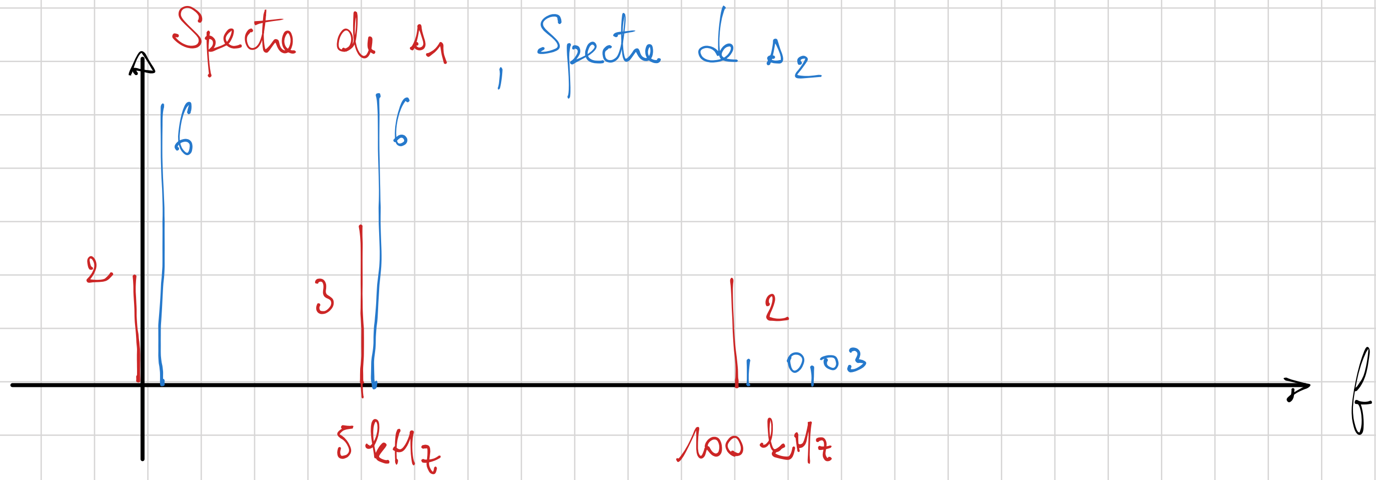
$$f_p \simeq f_0$$

$$H_{0P} = H_{0LP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q} \times 1} = Q H_{0LP} \Rightarrow Q = \frac{H_{0P}}{H_{0LP}} \simeq 5$$

2)

$$s_1(t) = \underbrace{4}_{\text{valeur moyenne}} + 3 \cos(2\pi \times \underbrace{5000}_{f = 5 \text{ kHz}} t) + 2 \cos\left(2\pi \underbrace{10^5}_{f = 100 \text{ kHz}} t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$s_2(t) = 4 \times \underbrace{1,5}_{H_{0LP}} + 3 \times \underbrace{2}_{G \text{ à } 5 \text{ kHz}} \cos(2\pi \times 5000 t) \underbrace{-}_{\varphi = -\pi} 2 \times \underbrace{0,015}_{G \text{ à } 100 \text{ kHz}} \cos\left(2\pi \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{4}\right)$$



le bruit haute fréquence est bien atténué