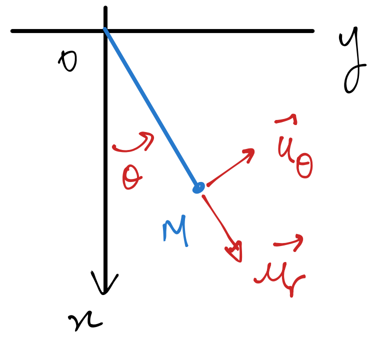
MECANIQUE DU POINT → exemples classiques dans $\mathcal{R}$ galiléen

* Pendule



$\vec{OM} = l\,\vec{u}_r$

$\vec{v} = l\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

$\vec{a} = l\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$

Rappel : $\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ $\qquad \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r$

BdF :
- poids $\vec{P} = mg\,\vec{u}_x = mg\cos\theta\,\vec{u}_r - mg\sin\theta\,\vec{u}_\theta$
- tension du fil $\vec{T} = -T\,\vec{u}_r$

PFD

$m\vec{a} = \vec{F}$

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \\ -ml\dot{\theta}^2 = -T \end{cases}$$

permettent de trouver l'expression de la tension T

Th. énergie mécanique

$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

$\mathcal{E}_p = -mgl\cos\theta$

$\frac{1}{2} m l^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = \mathcal{E}_m = cte$

$\dfrac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$

$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0$

Th. du moment cinétique

$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = ml^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z$

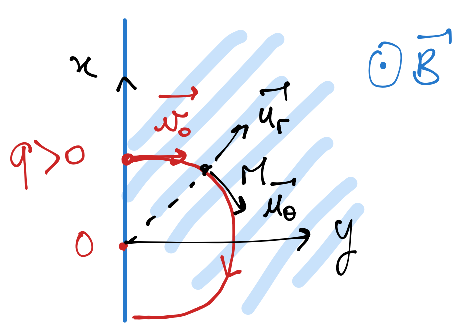
$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -mgl\sin\theta\,\vec{u}_z$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = 0$

$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$

équation du mouvement

* Particule de charge q qui entre avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans une zone où règne le champ magnétique $\vec{B}_0$ uniforme



$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ force de Lorentz

$\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v} = 0$: la force ne travaille pas → $\|\vec{v}\|$ est constante → le mouvement est circulaire

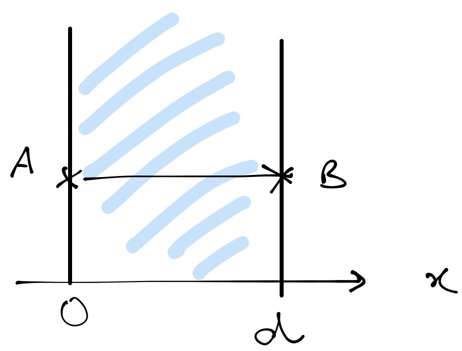
$\vec{OM} = R\,\vec{u}_r \qquad \vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{v} = v(t)\,\vec{u}_\theta$

$\vec{a} = R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_\theta - \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_r$

$\vec{F} = q v\,\vec{u}_\theta \wedge (-B_0\,\vec{u}_z) \rightarrow \vec{F} = -qvB\,\vec{u}_r$

PFD en projection sur $\vec{u}_r$: $-m\dfrac{v^2}{R} = -qvB \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{mv}{qB}}$

* **Freinage** Système de masse m, entre avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0 \vec{u_x}$ dans une zone de largeur d où il subit une force $\vec{F} = -f_0 \vec{u_x}$



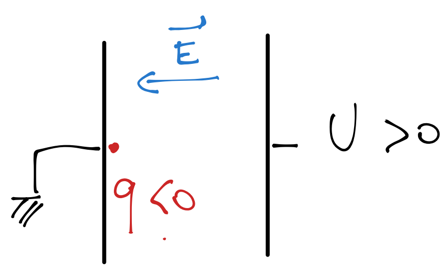
À quelle condition sur d peut-il traverser ?

$\rightarrow$ il traverse si sa vitesse en $x = d$: $v_x \geq 0$

Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = W_{AB}(\vec{F})$

$$\underbrace{\mathcal{E}_C(B)}_{0 \text{ dans le cas limite}} - \mathcal{E}_c(A) = -f_0\, d \quad \boxed{d_{max} = \frac{1}{2}\frac{m v_0^2}{F_0}}$$

* **Charge q accélérée par une différence de potentiel**



$\vec{E}$: uniforme (condensateur) et orienté dans le sens des potentiels décroissants

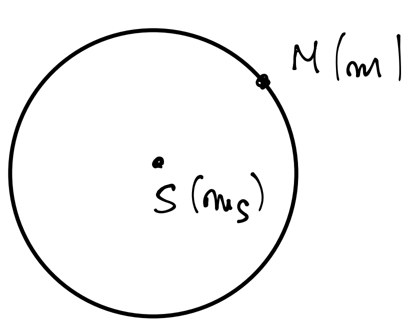
$\rightarrow$ Théorème de l'énergie mécanique

$$\mathcal{E}_{c,i} + \mathcal{E}_{p,i} = \mathcal{E}_{c,f} + \mathcal{E}_{p,f}$$

$$0 + q \times 0 = \frac{1}{2} m v_f^2 + qU$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = -qU \quad (>0)$$

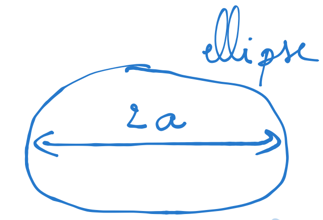
* **Planète en mouvement circulaire autour du Soleil**



$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r}$ (mouvement circulaire uniforme)

PFD : $-m\frac{v^2}{R} = -G\frac{m\, m_S}{R^2}$

$$\rightarrow \boxed{v^2 = \frac{G m_S}{R}}$$



$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} G \frac{m\, m_S}{R} = -\frac{\mathcal{E}_p}{2} \qquad \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{G m_S}{R}$$

$$\rightarrow \mathcal{E}_m = -\frac{1}{2}\frac{G\, m\, m_S}{R} \qquad \rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{G m_S}{4\pi^2} \quad \text{loi de KEPLER}$$

ces deux résultats se transposent au mouvement elliptique en remplaçant R par a = demi-grand axe