Préparation à l'oral : exercices de mécanique

Question de cours (d'après Mines-Ponts)

• Donner l'expression de l'énergie potentielle effective dans le cas d'un mouvement à force centrale en $1/r^2$. Discuter de la nature de la trajectoire en fonction de la valeur de l'énergie mécanique.

• Définir "force conservative". Comment calcule-t-on l'énergie potentielle associée? Le faire pour la force de rappel d'un ressort. Donner un exemple de force non conservative. Justifier.

• Lois de la dynamique en référentiel non galiléen. Exemples.

Ex. 1 - Force de traînée

On cherche à caractériser la force de traînée subie par une sphère de plomb de rayon a et de masse volumique ρ dans l'air.

1 - Dans un premier temps, la sphère est suspendue à un point fixe O par un fil et se trouve placée dans une soufflerie. La vitesse du vent, horizontale, a pour valeur v_0 et le fil fait alors un angle α avec la verticale. La résistance de l'air s'exprime par une force de norme $f = k\,\pi\,a^2\,v_0^2$ où v_0 est la vitesse du vent : en déduire la valeur numérique du coefficient k dans le système S.I.

2 - Cette sphère est maintenant lâchée dans l'air immobile, hors de la soufflerie, sans vitesse initiale. La norme de la force de frottement s'écrit alors $f = k\,\pi\,a^2\,v^2$ où v est la vitesse de l'obje,t et avec le même coefficient k qu'à la question précédente.

2.(a) - Justifier la différence entre les expressions des forces de frottement fournies dans les deux situations.

2.(b) - Calculer la vitesse limite de la bille; à quelle hauteur de chute dans le vide cette vitesse correspond-elle ?

2.(c) - Pour une chute de deux mètres de haut, quelle fraction du poids la force de frottement représente-t-elle ?

Données : $a = 1,0\,\text{cm}$; $\rho = 11,3\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$; $v_0 = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 1,68\cdot 10^{-1}\,\text{rad}$; $g = 9,8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Ex. 2 - Equilibre en rotation (d'après Mines-Ponts)

Une perle de masse m coulisse sur un anneau circulaire de rayon a. Cet anneau, placé verticalement, est lui même en rotation autour de l'axe vertical, fixe, passant par son centre, à une certaine vitesse de rotation uniforme Ω.

▷ Déterminer les positions d'équilibre de la perle et étudier leurs stabilités.

Ex. 3 - Satellite (d'après Centrale)

On donne les valeurs numériques suivantes :

constante de la gravitation $\mathcal{G}$	masse de la Terre M_T	masse du Soleil M_S	distance Terre–Soleil D_{TS}	rayon terrestre R_T
$6,7\cdot 10^{-11}$ uSI	$6,0\cdot 10^{24}$ kg	$2,0\cdot 10^{30}$ kg	$1,5\cdot 10^{8}$ km	$6,4\cdot 10^{3}$ km

1 - Un objet ponctuel, de masse m, situé en M, subit une unique force $\overrightarrow{f} = f(r)\,\overrightarrow{e}_r$ dans le référentiel galiléen ($\mathcal{R}$). Montrer que sa trajectoire ($\mathcal{T}$) est incluse dans un plan et déterminer celui-ci. Montrer que cet objet respecte la loi des aires.

2 - Un satellite ($\mathcal{S}\dashv$) est sur une orbite circulaire ($\mathcal{O}$) de rayon r_0 autour de la Terre à une altitude z_0.

2.(a)- Démontrer qu'on peut négliger la force de gravitation du Soleil, et en déduire le référentiel galiléen adapté à cette étude.

2.(b)- Déterminer, dans ce référentiel, l'expression de la vitesse v_0 du satellite, son énergie potentielle de gravitation et sa période de révolution autour de la Terre.

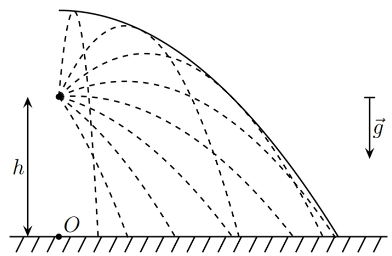
Ex. 4 - Parabole de sureté

Un lance-balle automatique de base-ball lance des balles depuis une hauteur h avec un angle α réglable par rapport à l'horizontale (Ox), et une vitesse de norme v_0 fixe. On prendra l'axe Oz vers le haut.

1 - Déterminer la trajectoire de l'objet.

2 - En déduire l'expression de la cote du point le plus haut atteint, appelée *flèche* de la balle.

3 - On cherche à déterminer l'expression de la courbe séparant l'ensemble des points pouvant être atteints par la balle des points qu'elle ne peut atteindre, appelée *parabole de sûreté*.
Pour cela, discuter de la condition à laquelle un point $M(x_0, z_0)$ peut être atteint par la balle.



On pourra utiliser : $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$

Ex. 5 - Roue de vélo (d'après Centrale 1)

Une roue de vélo de rayon R est posée sur le sol et roule sans glisser sur une route horizontale. Le moyeu avance à vitesse constante $\overrightarrow{v}$ par rapport au sol. On munit la roue d'une base polaire $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta)$.

1 - Déterminer la vitesse d'un point A de la roue par rapport au sol (vectoriellement et en norme).

2 - Déterminer l'expression des coordonnées du point A en fonction du temps. Proposer les instructions en *Python* permettant d'afficher la courbe de la trajectoire.

3 - Quelle puissance doit développer un cycliste pour avancer à vitesse constante en montée, en prenant en compte la résistance de l'air $\frac{1}{2}\, C_x\, S\, \rho_a\, v^2$ où C_x est le coefficient de résistance aérodynamique (environ égal à 0,5 dans ces circonstances), ρ_a la masse volumique de l'air, S la section du cycliste et v sa vitesse ?
Faire l'application numérique avec les ordres de grandeur que vous jugerez pertinents.

Ex. 6 - Voyage au centre de la Terre (d'après Mines-Ponts)

On suppose qu'un puits de forage rectiligne joint deux points distincts situés à la surface de la Terre. Ces deux points ne sont pas diamétralement opposés.
On lâche dans ce puits un petit objet de masse m sans vitesse initiale. On suppose que la Terre est à répartition homogène de masse.

1 - L'objet tombe sans frottement. Où sa trajectoire l'emmène-t-elle ? En combien de temps ?

2 - Mêmes questions en introduisant des frottements, que l'on pourra supposer linéaires en vitesse.

3 - Que se passe-t-il si la Terre tourne sur elle-même ? (On discutera de ce qui se passe en fonction de la direction du puits de forage par rapport à la direction de l'axe de rotation.)

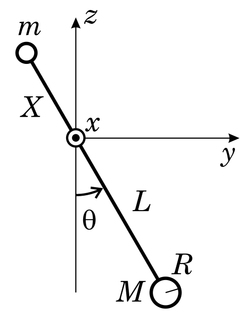
Ex. 7 - Comète (d'après Mines-Ponts, sans préparation)

On considère une comète sphérique de masse m, à une distance r d'un astre de masse M considéré fixe. Cet astre est entouré d'un nuage de poussière de masse volumique ρ, de symétrie sphérique et exerçant sur la comète une force : $\overrightarrow{F}_n = -\frac{4}{3}\,\pi\,\mathcal{G}\,m\,\rho\,r\,\overrightarrow{e}_r$.

▷ Les orbites circulaires sont-elles stables ?

Indications fournies en cours d'épreuve : "Ne pas chercher à déterminer les valeurs des rayons possibles, mais exploiter les équations qu'ils vérifient. Penser énergie potentielle effective."

Ex. 8 - Double masselotte (d'après CCINP)



Le bras d'un système mécanique possède d'un côté un poids (masse M, modélisée comme un cylindre de rayon R, dont le centre est situé à distance L de l'axe de rotation) et de l'autre côté un contrepoids (masse m considérée comme ponctuelle, située à distance X variable de l'axe de rotation). On considère la liaison pivot comme était parfaite.

On donne le moment d'inertie de la masse M : $J_M = \frac{1}{2}\, M\, R^2 + M\, L^2$

1 - En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation du mouvement de ce pendule. Discuter des positions d'équilibre et du type de mouvement selon la valeur de X.

2 - Dans le cas où $X < \frac{M\,L}{m}$, et si on se limite aux petits mouvements autour de la position d'équilibre stable, obtenir l'expression de la fréquence d'oscillations du pendule. A quelle(s) condition(s) retrouve-t-on le cas du pendule simple ?

3 - Quelle est l'énergie potentielle du système $\{m + M\}$?

4 - Retrouver, par méthode énergétique, les positions d'équilibre possibles, et l'équation différentielle vérifiée par le système.

Ex. 9 - Satellite geostationnaire (d'après Mines-Telecom)

1 - Définir "satellite géostationnaire" et dterminer l'altitude d'un satellite en orbite géostationnaire.

2 - Déterminer la variation de vitesse Δv pour passer en orbite géostationnaire à partir d'une orbite de transfert elliptique dont le périgée est à la distance $r_p = 200\,\text{km}$ de la terre et l'apogée se situe sur l'orbite géostationnaire.

Ex. 10 - Ressort dans un ascenseur (d'après Mines-Télécom)

On considère un ascenseur en translation verticale dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans cet ascenseur est placé un solide de masse m, attaché au plafond de l'ascenseur par l'intermédiaire d'un ressort de masse négligeable et de raideur k. De plus, le solide est soumis à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\,\overrightarrow{v}$. À $t = 0$, $v_{\text{asc}} = 0$, $v = 0$, et l'ascenseur se met à monter.

1 - Donner l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide.

2 - On suppose que $v_{\text{asc}} = a\,t$ (a =cste), donner l'expression du mouvement du solide.