Préparation à l'oral : mécanique quantique et physique statistique

Question de cours (d'après Mines-Ponts)

• Particule quantique libre : états stationnaires, relation de dispersion, vitesse de phase et vecteur courant de densité de probabilité.

• Inégalité de Heisenberg spatiale : énoncé ; commentaire dans le cas de la particule libre.

• États stationnaires d'une particule arrivant avec une énergie E sur une marche de potentiel V(=cste) dans le cas où $E > V$ (voir aussi ex. 3).

• Système sans dégénérescence à deux niveaux d'énergie $+\mathcal{E}$ et $-\mathcal{E}$, en équilibre avec un thermostat à température T : énergie moyenne, capacité thermique, fluctuations en fonction de la température, et citer des exemples.

Ex. 1 - Quanton dans un puits infini (d'après Mines-Ponts)

On considère un quanton (particule quantique, de masse m et d'énergie E) prisonnier d'un puits de potentiel.
On prend $V(x) \to +\infty$ pour $x < -a$ et $x > a$.
Pour x entre $-a$ et 0, le potentiel $V(x)$ est nul
Pour x entre 0 et a , le potentiel est négatif et on a $V(x) = -V_0$.

▷ Déterminer le premier niveau d'énergie positive du quanton pour avoir un état stationnaire.

Indications : il faut trouver une matrice reliant les constantes d'intégration entre elles, puis utiliser la condition sur cette matrice pour que la solution du système d'équations ne soit pas identiquement nulle.

Ex. 2 - Atmosphère (d'après CCINP)

Dans l'atmosphère, la pression dépend de l'altitude z.

1 - Dans le modèle "atmosphère isotherme à T_0", retrouver l'expression de la dépendance $P(z)$ en fonction de M (masse molaire de l'air), T_0 et des constantes adéquates.

2 - Quelle est la hauteur caractéristique H des variations de pression atmosphérique ? Donner son expression et sa valeur numérique. Commenter.

3 - On admet que la probabilité $p(z)$ de trouver une particule d'air à l'altitude z est proportionnelle à la densité particulaire $n^*(z)$ (nombre de particules par unité de volume). Exprimer cette probabilité, en identifiant un facteur de Boltzmann, où on explicitera l'énergie qui entre en jeu.

4 - On suppose désormais que T décroît selon la loi : $T(z) = T_0\,(1-\alpha\,z)$ où $\alpha = 2,25\cdot 10^{-2}\,\mathrm{km}^{-1}$. Ceci correspond au gradient de température réellement mesuré dans l'atmosphère (grâce à des relevés effectués par des ballons-sondes, par exemple).
Déterminer la nouvelle expression de $P(z)$.

5 - On cherche à déterminer l'influence de la variation de la pesanteur sur l'évolution de la pression avec l'altitude.

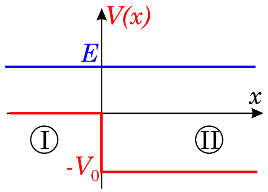
5.a - Déterminer, en justifiant correctement, l'expression du champ de pesanteur $\overrightarrow{G}$ créé par la Terre, en fonction de l'altitude z.

5.b - Comparer, pour une même altitude z comptée par rapport au sol, les variations relatives du champ de pesanteur $\dfrac{g(z)-g_0}{g_0}$ et de la température $\dfrac{T(z)-T_0}{T_0}$ (où g_0 et T_0 désignent le champ de pesanteur et la température au sol). Conclure sur le facteur prépondérant dans la loi de variation de la pression.

Données : $R = 8,314\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$; masse molaire de l'air : $M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$; constante universelle de la gravitation : $\mathcal{G} = 6,7\cdot 10^{-11}$ u.S.I. ; masse de la Terre : $M_T \simeq 6,0\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

Ex. 3 - Quanton et marche de potentiel (d'après CCINP)

On étudie le mouvement d'un quanton de masse m et d'énergie $E > 0$, qui, venant de $x = -\infty$, rencontre en $x = 0$ une marche de potentiel de la forme ci-contre (avec $V_0 > 0$). On note φ la fonction d'onde spatiale associée.



1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par φ.

2 - Donner les expressions de φ dans les milieux I et II.

3 - Déterminer r et t, coefficients de réflexion (resp. transmission) associés à l'amplitude de la fonction d'onde réfléchie (resp. transmise).

4 - En déduire une expression de R et T, coefficients de réflexion de de transmission en terme de courant de probabilité. Commenter. Application numérique pour $V_0 = 8\,E$.

Ex. 4 - Modèle d'Einstein du solide (d'après Mines-Ponts)

On modélise les vibrations des atomes au sein d'un solide par une assemblée d'oscillateurs harmoniques, qui vibrent autour de leur position d'équilibre stable. A une température T fixée, l'énergie d'un oscillateur harmonique microscopique est quantifiée et vaut $E_n = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$ selon un modèle unidimensionnel.

1 - Donner la probabilité qu'un oscillateur se trouve dans un état d'énergie E_n.

2 - Calculer l'énergie moyenne du solide.

Indication : on pourra utiliser $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\, e^{-n\,\alpha} = \frac{1}{4\,\mathrm{sh}^2(\alpha/2)}$.

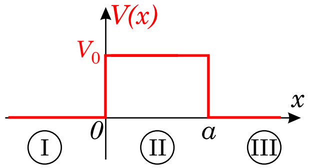
3 - Calculer la capacité thermique molaire du solide.

4 - Examiner et commenter la limite en haute température. Tracer l'allure de la courbe $C_{V\,m}(T)$.

Ex. 5 - Courant tunnel (d'après Mines-Telecom)

On s'intéresse au fonctionnement d'une pointe de microscope à effet tunnel : la pointe du microscope est située à une distance a d'un échantillon. Cette pointe est parcourue par un courant d'intensité I : arrivés à son extrémité, les électrons doivent franchir l'espace vide entre la pointe et l'échantillon, métallique lui aussi.

On modélise donc ce phénomène en considérant un faisceau d'électrons, dont la masse est notée m, arrivant de $x = -\infty$ avec une énergie E sur une barrière de potentiel de hauteur V_0.



1 - Dans le cas classique, qu'arrive-t-il a la particule incidente ?

2 - En physique quantique les choses sont bien différentes. Donner les équations de Schrödinger indépendantes du temps vérifiées par la fonction d'onde dans les trois domaines de l'espace. Expliquer qualitativement ce que l'on va observer, selon que $E > V_0$ ou $E < V_0$. Dans quel cas parle-t-on d'effet tunnel ?

On donne l'expression du coefficient de transmission en densité de courant de probabilité : $T = \dfrac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4\,E\,(V_0 - E)}\,\mathrm{sh}^2(a/\delta)}$ où $\delta = \dfrac{\hbar}{\sqrt{2\,m\,(V_0 - E)}}$.

3 - Que représente δ ? Rappeler la définition exacte du coefficient T. Qu'obtient-on dans le cas où $a >$qquesδ ?

4 - On obtient, pour les électrons d'un STM (Scanning Tunnelling Microscope) : $\delta \simeq 40\,\mathrm{pm}$. En prenant $E \simeq V_0/2$ et $a \simeq 300\,\mathrm{pm}$, estimer l'ordre de grandeur du coefficient T. On mesure un courant tunnel de l'ordre du nano-Ampère. Peut-on envisager une telle mesure à l'aide des instrements classiquement utilisés en TP de physique ?

5 - Si on remplace le flux d'électrons par un flux de protons, que se passe-t-il ?

Note : si la question était réellement posée ainsi, je dirais que la réponse serait simplement "c'est impossible"!..

5 bis - (*Question supplémentaire au cours de l'oral*) Que se passe-t-il à gauche de la barrière ? Tracer l'allure de la densité de probabilité en fonction de x.