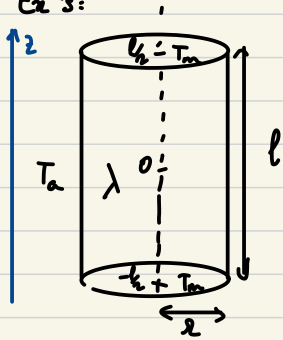
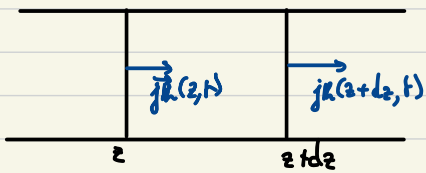
30 Mai 2023:

Diffusion thermique:

Ex 3:



On a:



$S = 2\pi r$, $\phi = h S \Delta T$

1) entre z et $z+dz$ et entre t et $t+dt$:

<u>1°P:</u> $dU = \delta Q$

or $dU = m c dT = \rho c S dz dT$

$$\rho c S dz T(z,t+dt) = \rho c S dz T(z,t) + [j_{th}(z)dt - j_{th}(z+dz)dt]S - h 2\pi r dz (T(z) - T_a)$$

$$\Rightarrow \frac{dj_{th}}{dz} = \frac{2h}{r}(T(z) - T_a)$$

et. (Loi de Fourier) $\vec{j_{th}} = -\lambda \vec{\text{grad}}\, T$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2T}{dz^2} + \frac{2h}{\lambda r}(T(z) - T_a) = 0}$$

et on pose $\delta^2 = \frac{\lambda r}{2h}$ ie. $\delta = \sqrt{\frac{\lambda r}{2h}}$

pour obtenir:

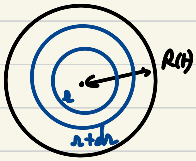
$$T(z) = T_a + A e^{-z/\delta} + B e^{z/\delta}$$

Puis exploitation des condit. limite.

2) On a:

$$\phi = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} h 2\pi r (T(z) - T_a)\, dz$$

Ex 5 :



1) $\cdot\, \phi(r) = \iint_S \vec{j_{th}} \cdot \vec{dS} = j_{th}(r) \cdot 4\pi r^2 = A$ (RP)

cste.

d'où :

$$-\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{A}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \quad T(r) = \frac{A}{\lambda 4\pi r} + T_0$$

et $T(r) \xrightarrow[r \to \infty]{} T_0$

donc

$$T(R(t)) = T_f \quad \frac{A}{\lambda 4\pi R(t)} + T_0 = T_f$$

$$\Rightarrow \quad A = (T_f - T_0) \lambda 4\pi R(t)$$

et finalement :

$$\boxed{T(r) = \frac{(T_f - T_0) R(t)}{r} + T_0}$$

2) $\mathcal{E}_p(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\, h_{fus}$

et :

$$\mathcal{E}_p(r+dr) - \mathcal{E}_p(r) = \rho 4\pi r^2 h_{fus}\, dr$$
$$= \phi(r)\, dt$$
$$= (T_f - T_0) \lambda 4\pi R(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi\rho R(t)^2 h_{fus}\, dR(t) = (T_f - T_0) \lambda 4\pi R(t)\, dt$$ (c'est le 1er principe)

$$\Rightarrow \quad R(t) \rho\, h_{fus}\, dR(t) = \lambda (T_f - T_0)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_{R_0}^{0} \rho\, h_{fus}\, r\, dr = \int_0^t \lambda (T_f - T_0)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad -\rho\, h_{fus} \frac{R_0^2}{2} = \lambda (T_f - T_0)\, t$$

d'où :

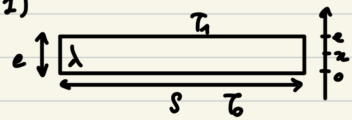
$$\boxed{t = -\rho\, h_{fus} \frac{R_0^2}{2\lambda (T_f - T_0)}}$$

AN : pour $R_0 = 1\,cm$:

$t \simeq 2{,}5 \cdot 10^2\, s$

Ex 4:

1)



Mque: $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

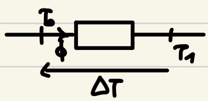
et en régime permanent:
$$\vec{j_{th}} = -\lambda \, \vec{\text{grad}}\, T$$

$$\phi = \int_S \vec{j_{th}} \cdot \vec{dS} = c$$
or : $\phi = -\lambda \int_S \frac{dT}{dx}\, dS = -\lambda S \frac{dT}{dx}$

donc: $T = -\frac{c}{\lambda S} x + b$

et $\begin{cases} T(0) = T_0 = b \\ T(e) = \frac{-c}{\lambda S} e + T_0 = T_1 \end{cases}$

donc:
$$\phi = c = \frac{(T_0 - T_1)\lambda S}{e}$$



d'où $\Delta T = \phi R_{th}$
$\Rightarrow R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

2) en rég. permanent: (en supposant avoir des morceaux de mê dim.)
· $R_{th,bois} = \frac{e}{\lambda_{bois} S}$ · $R_{th,poele} = \frac{e}{\lambda_{poele} S}$

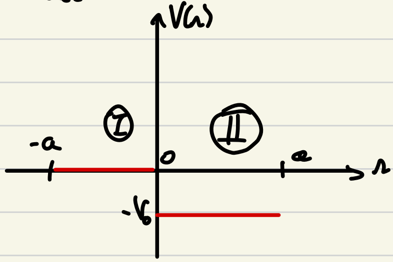
et l'énergie nécess. à la fonte du glaçon est: $l_{fus}\, m$
On calcule le tps. nécessaire pour que le flux de la table au glaçon fournisse $l_{fus}\, m$:
$$\phi_{bois} = \frac{T_0 - T_g}{R_{th,bois}}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{bois} = \frac{l_{fus}\, m_{glaçon}}{\phi_{bois}} = \frac{R_{th,bois}\, l_{fus}\, m_{glaçon}}{(T_0 - T_g)}$$

et $\frac{\Delta t_{bois}}{\Delta t_{poele}} > 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda_{bois}}{\lambda_{poele}} < 1}$

MEQ :

Exercice 1 :



On a :

$$\begin{cases} \varphi_I(x) = A\cos(k_1 x) + B\sin(k_1 x) \\ \varphi_{II}(x) = A'\cos(k_2 x) + B'\sin(k_2 x) \end{cases}$$

avec : $\cdot\, k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ $\quad \cdot\, k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$

de plus, on a une disc. infinie en a et -a :

$$\Rightarrow \varphi_I(a) = \varphi_{II}(a) = 0$$

et une disc. finie en 0 :

$$\Rightarrow \varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \quad \text{i.e.} \quad \boxed{A = A'}$$

$$\text{et} \quad \varphi_I'(0) = \varphi_{II}'(0)$$

or $\varphi_I'(x) = -k_1 A\sin(k_1 x) + k_1 B\cos(k_1 x)$

$\varphi_{II}'(x) = -k_2 A'\sin(k_2 x) + k_2 B\cos(k_2 x)$

i.e. $\boxed{k_1 B = k_2 B'}$

On a donc :

$$\begin{cases} A\cos(k_1 a) - B\sin(k_1 a) = 0 \\ A\cos(k_2 a) + B\frac{k_1}{k_2}\sin(k_2 a) = 0 \end{cases}$$

donc $\begin{vmatrix} \cos(k_1 a) & -\sin(k_1 a) \\ \cos(k_2 a) & \frac{k_1}{k_2}\sin(k_2 a) \end{vmatrix} = 0$ (coté de sol.)
le cas a=b=0 trivial

$$\Rightarrow \frac{k_1}{k_2}\sin(k_2 a)\cos(k_1 a) + \cos(k_2 a)\sin(k_1 a) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = -\frac{\tan(k_1 a)}{\tan(k_2 a)}$$