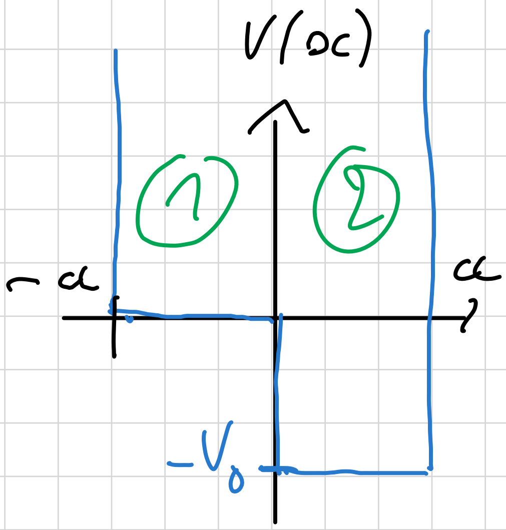
MÉCA Q.

Exo 1 :



$$\Psi(x,t) = f(t)\varphi(x)$$

$$i\hbar f'(t)\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x)f(t) + Vf'(t)\varphi(x)$$

Solution : $f(t) = e^{\frac{E}{i\hbar}t}$

On simplifie par $f(t)$:

$$\varphi''(x) + (E-V)\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)\varphi(x) = 0$$

Dans les différentes zones :

$$k_1^2 = \frac{E2m}{\hbar^2}$$

$$\begin{cases} ① \quad \varphi_1(x) = B_1 \sin(k_1 x + k_1 a) \\ ② \quad \varphi_2(x) = B_2 \sin(k_2 x - k_2 a) \end{cases}$$

$$k_2^2 = \frac{(E+V_0)2m}{\hbar^2}$$

Par continuité de la fonction d'onde :

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \text{ et } \varphi_1'(0) = \varphi_2'(0)$$

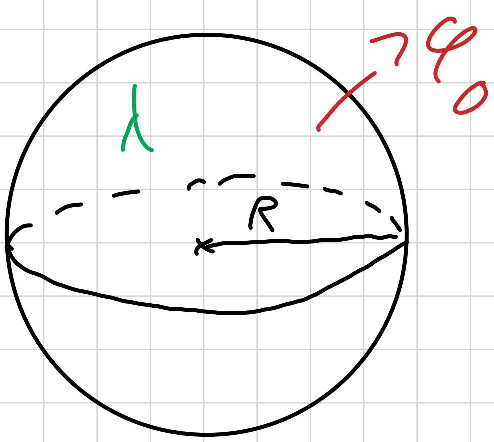
Donc : $\begin{cases} B_1 \sin(k_1 a) - B_2 \sin(k_2 a) = 0 \\ B_1 k_1 \cos(k_1 a) + B_2 k_2 \cos(k_2 a) = 0 \end{cases}$

$\rightarrow$ Sans plus d'information, difficile d'aller plus loin

On a quand même : $k_1 \sin(k_1 a)\cos(k_2 a) + k_1 \cos(k_1 a)\sin(k_2 a) = 0$

Ou encore : $\dfrac{k_1}{k_2} = - \dfrac{\tan(k_2 a)}{\tan(k_1 a)}$

Exercice 1 (Thermo) :



1/ Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}(T)$

$[\vec{j}_{th}] = W.L^{-2}$

$[T] = K$

donc $W.L^{-2} = [\lambda].K.L^{-1}$

$\Rightarrow [\lambda] = W.K.L^{-1}$

2/ $\oiint_S \vec{j}(r).\vec{dS} = \phi$

Or $\phi = \varphi_0 \frac{4}{3} \pi R^3$

$$\oiint_S \vec{j}(r).\vec{dS} = j(r) \iint_S dS = 4\pi r^2 j(r)$$

$$4\pi r^2 j(r) = \varphi_0 \, \frac{4}{3}\pi R^3 = A$$

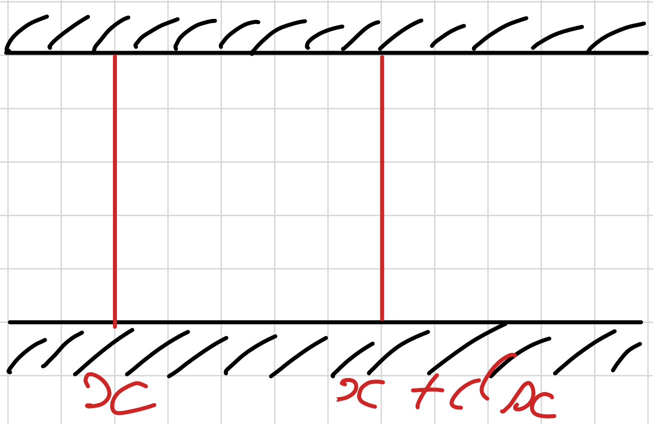
3/ $j(r) = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\,(T(r))$

$$T(r) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^r j(r)\,dr = \frac{1}{\lambda}\frac{A}{4\pi}\left(\frac{1}{r} + C\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{\lambda}\frac{A}{4\pi r} + T_0}$$

Exercice 2

1/



On considère $T(x,t)$

1er principe : $dU = \rho S c \, dx \, dT$

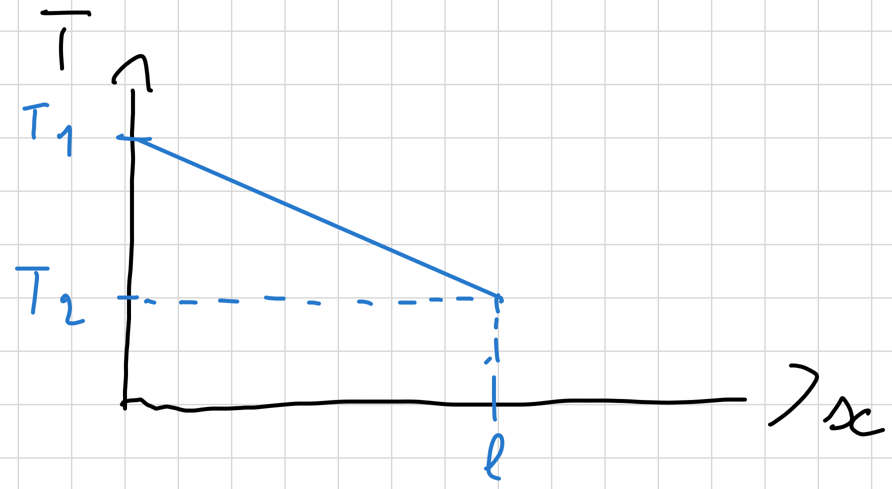
$$\delta Q = \left(j_{th}(x).S - j_{th}(x+dx).S\right) dt$$

$\longrightarrow$ redémonstration de l'équation de la chaleur

À retenir : en régime permanent : $\Delta T = 0$ (à $t=0$)

$$\frac{d j_{th}}{dx} = 0$$

On a ainsi :



Donc $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{\ell} x + T_1$

2/ à $t>0$: on n'est plus en régime permanent

On a : $\int \delta Q = 0$ (car le cylindre est calorifugé)

On par le 1er principe : $\Delta U = \int_0^\ell \rho c \left(T_f - T_i(x)\right) S \, dx = 0$

$$\Rightarrow \ell T_f = \int_0^\ell \left(\frac{T_2 - T_1}{\ell} x + T_1 \right) dx$$

$$= \frac{T_2 - T_1}{\ell} \frac{\ell^2}{2} + T_1 \ell$$

Et donc $\boxed{T_f = \frac{T_2 + T_1}{2}}$

3/ Ici $\Delta S = \int_0^\ell \rho c \ln\left(\frac{T_f}{T_i(x)}\right) S \, dx = 0$

section