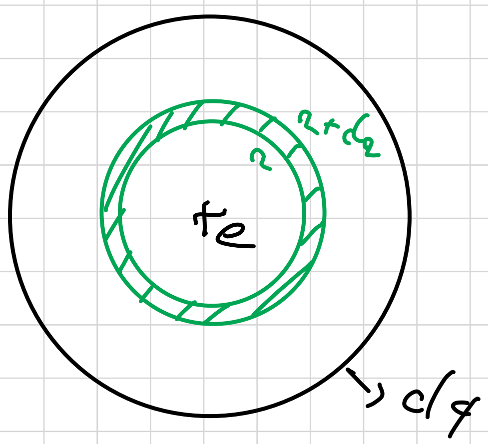
Électromagnétisme ARQS - Exc 2

1/ charge ponctuelle : $+e$ nuage d'électrons : densité volumique ρ



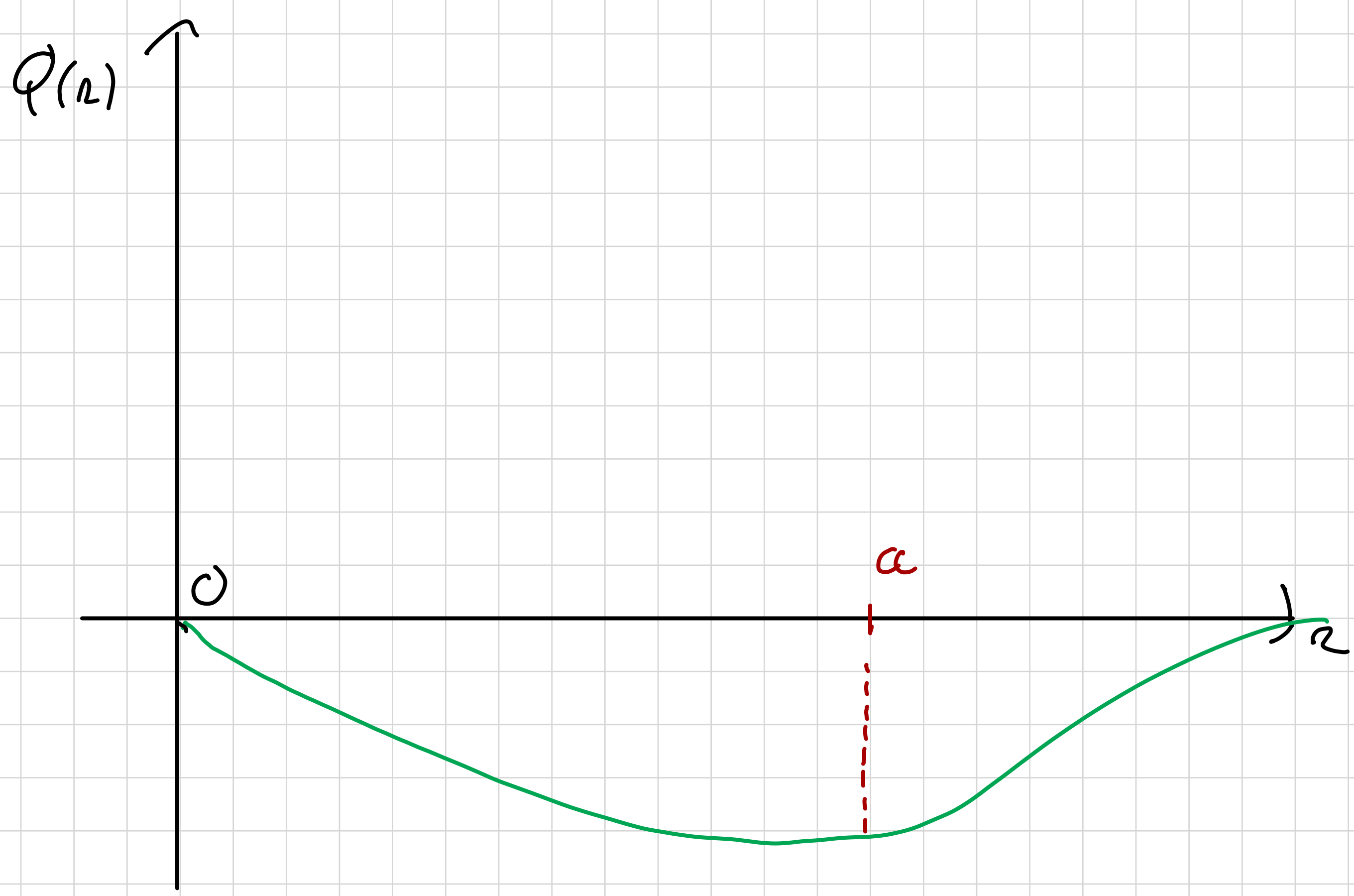
$$Q(r)\,dr = 4\pi r^2 \rho(r)\,dr$$

$$= -\underbrace{\frac{4er^2}{a^3} e^{-2r/a}}_{Q(r)} dr$$

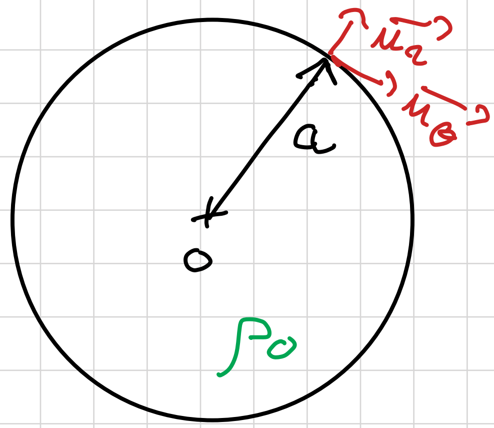
$$Q'(r) = -\frac{\cancel{8}er}{a^3}\cancel{e^{-2r/a}} + \frac{\cancel{8}er^2}{a^4}\cancel{e^{-2r/a}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r^2}{a} = r$$

S'annule en $r_m = a$ d'où la courbe :



Variante : Calculer le champ pour une boule uniformément chargée



Invariances : $\vec{E}(M) = \vec{E(r)}$

Symétries : $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_r}$

Théorème de GAUSS : $$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Si $r > a$: $Q_{int} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi a^3$ et $\oiint_S \vec{E(r)}\cdot\vec{dS} = E(r)4\pi r^2$

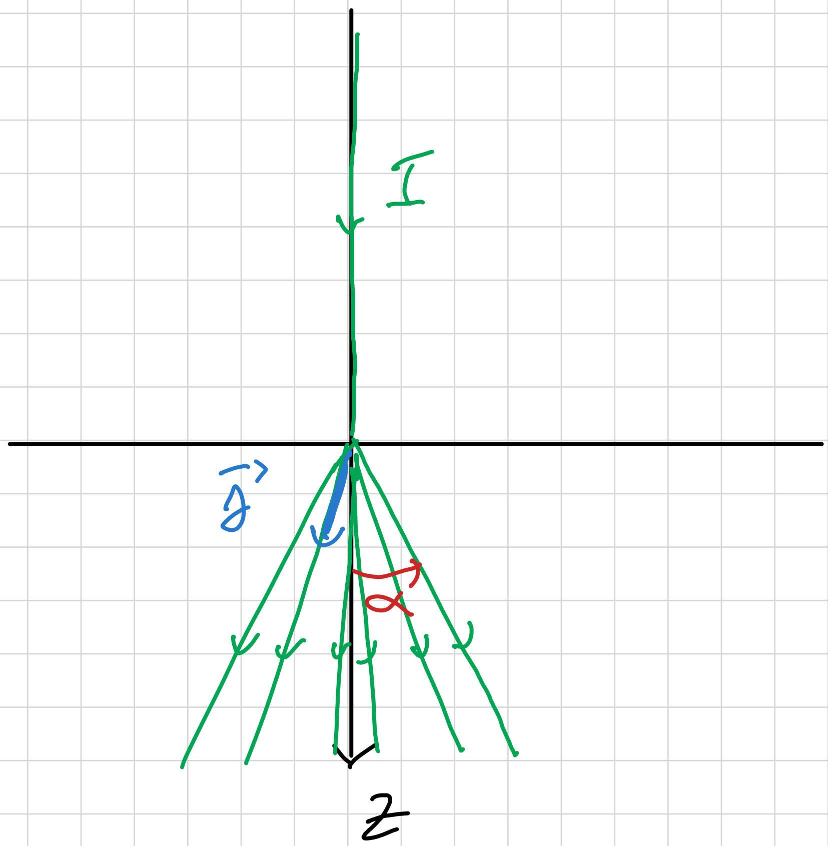
Finalement : $E(r)4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$ donc

$$E(r) = \frac{a^3\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Si $r \leq a$:

$$E(r) = \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0}$$

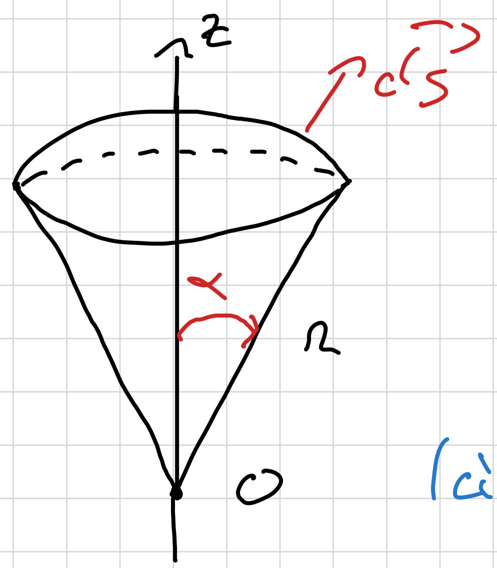
Exercice 4 ARQS



On se place en sphériques :

$$\vec{j} = j(r)\,\vec{u_r}$$

On modélise la situation par une calotte sphérique :



L'élément de surface $\vec{dS}$ s'écrit

$$\vec{dS} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

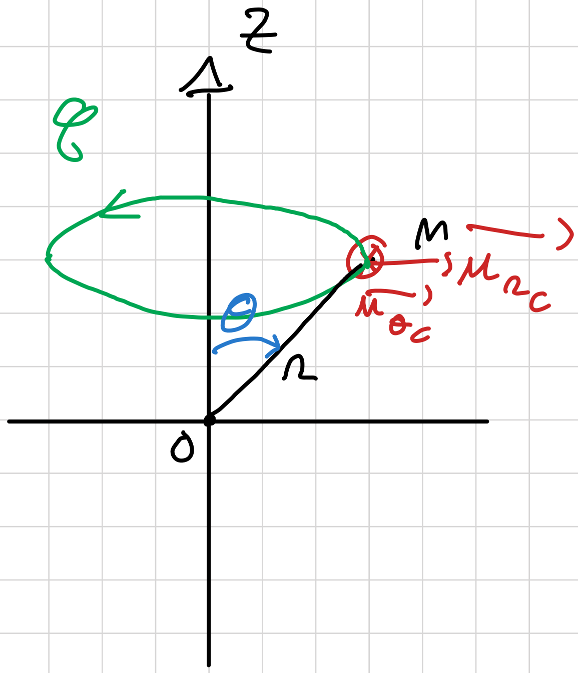
(ici calculer à partir de $\vec{dOM} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta\, d\varphi\,\vec{u_\varphi}$)

On a : $I = \iint_{\varphi} \vec{J}\cdot\vec{dS} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\alpha} j(r)\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$= j(r)\, r^2\, 2\pi\,(1-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}(M) = \frac{I}{2\pi r^2 (1-\cos\alpha)}\,\vec{u_r}}$$

* Calcul du champ $\vec{B}$



$\mathcal{C}$ le contour d'Ampère

Symétries : $\vec{B} \perp$ plan $(M, \vec{u_{r_c}}, \vec{u_z})$

$\Rightarrow \vec{B} = B(M)\vec{u_{\theta_c}}$

Invariances : rotation autour de (Oz)

$\Rightarrow B(M) = B(r_c, z_c)$

Théorème d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{d\ell} = \mu_0 I_{enlacé}$

Ici : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{d\ell} = B(M) 2\pi r_c$

Deux cas pour $I_{enlacé}$ (on repasse par les coordonnées sphériques)

$\theta < \alpha$: $I_{enlacé} = j(r) 2\pi r^2 (1-\cos\theta) = \left(\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\alpha}\right)$

$\theta \geq \alpha$: $I_{enlacé} = I$

Exercice 1 Ondes

1/ Équations de MAXWELL :

M-G : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ dans le vide

M-φ : $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

M-F : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

M-A : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Équation de propagation :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad (M\text{-}F)$$

Or, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}(\vec{E})\right) - \Delta \vec{E}$

comme $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ (M-G), $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\Delta \vec{E}$

d'où $-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$

$$\Rightarrow -\Delta \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

2/ $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\vec{u_z}$

Par l'équation de propagation : $\frac{1}{c^2}\omega^2 \vec{E} = k^2 \vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = k^2}$$ relation de dispersion

3/ vitesse : $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$

propagation selon $+\vec{u}_x$

4/ Polarisation rectiligne selon $\vec{u}_z$. On polarise avec un polariseur.

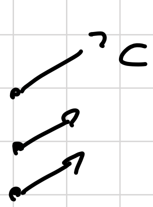
5/ $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ la relation de structure

6/ $$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0 \omega} = \frac{E\vec{u}_z \wedge (k\vec{u}_x \wedge E\vec{u}_z)}{\mu_0 \omega}$$

$$= \frac{E\vec{u}_z \wedge -kE\vec{u}_y}{\mu_0 \omega} = \boxed{\frac{k^2 E^2}{\mu_0 \omega} \vec{u}_x}$$

$[\vec{\Pi}] = W.m^{-2}$

7/ ODG : $\sim 10^2 \ W.m^{-2}$



$E = h\nu = \hbar\omega$

$\vec{j} = \rho_m \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{\Pi} = \rho \vec{c}$ donc $\vec{\Pi} = n \hbar \omega c$

Exercice 6 (Ondes)

On sq $\omega \approx 10^{14}$ Hz

$\rightarrow$ loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

Eq° de MAXWELL :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Milieu globalement neutre : $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

On a : $\dfrac{\|\vec{j}\|}{\|\omega \varepsilon_0 \vec{E}\|} = \dfrac{\gamma}{\omega \varepsilon_0} \dfrac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{E}\|} = \dfrac{\gamma}{\omega \varepsilon_0}$

$\dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = c^2$ donc $1/\varepsilon_0 = c^2 \mu_0 = 4\pi . 10^{-7} \times 9 . 10^{16}$

$\sim 1.1\ 10^{2}\ 10^{-7}\ 10^{16}$

donc $1/\varepsilon_0$ grand donc ε_0 petit, donc on peut le négliger

d'où : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}$

Or, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = \underbrace{\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \operatorname{div} \vec{E}}_{= \vec{0}} - \Delta \vec{E}$

donc $\dfrac{-\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} \right) = -\Delta \vec{E}$

équation de diffusion

donc $\mu_0 \gamma \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \Delta \vec{E} \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}}$

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{i(\omega t - kx)}$, En passant par les complexes :

$$-k^2 - \mu_0 \gamma \omega = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = -i\mu_0 \gamma \omega = e^{i\pi/2} \mu_0 \gamma \omega$$

donc $k = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega}$

On note $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ l'épaisseur de peau

$\underline{\text{A.N}}$: $\delta = \left(\frac{2}{4\pi.10^{7}.10^{-7} 2\pi 10^{9}} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{4\pi^2 10^9}} \times \frac{1}{10^4}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{10^5} = 0{,}7.10^{-5} = 70\,\mu m > 20\,\mu m$$

donc on peut toujours recevoir des appels

⚠ D'après l'énoncé il faut passer par la puissance

→ $\vec{\Pi}$ en $\|\vec{E}\|^2$ → $e^{-2z/\delta}$

→ épaisseur caractéristique $\frac{\delta}{2} = 35\,\mu m$