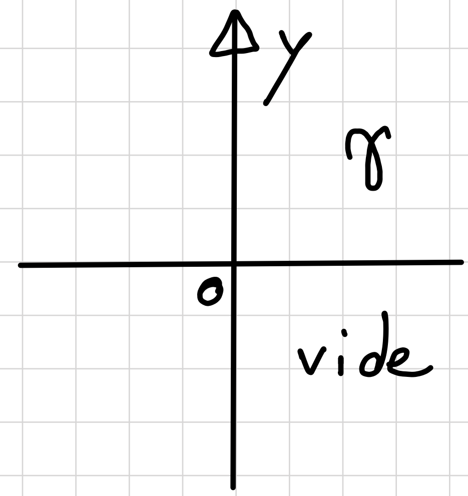
Ondes électromagnétiques

Exercice 4 - Conducteurs



1) $\vec{E} = E_0 \exp(i\omega t) f(y) \vec{u_z}$

$\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad \left(= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$

$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$

En passant en complexes,

$\operatorname{div}(E_0 \exp(i\omega t) f(y) \vec{u_z}) = i\omega E_0 \exp(i\omega t) f(y) = \rho/\varepsilon_0$

$\vec{\operatorname{rot}}(E_0 \exp(i\omega t) f(y) \vec{u_z}) = E_0 \exp(i\omega t) \frac{\partial f(y)}{\partial y} \vec{u_x}$

→ $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$

$\vec{\operatorname{rot}}(-\partial B/\partial t) = -\Delta \vec{E}$

$-\mu_0 \partial \vec{J}/\partial t = -\Delta \vec{E}$ soit comme $j = \gamma \vec{E}$ (Loi d'Ohm locale)

$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \partial \vec{E}/\partial t = 0}$ En remplaçant,

$E_0 \exp(i\omega t) \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \vec{u_z} - \mu_0 \gamma i\omega E_0 \exp(i\omega t) f(y) \vec{u_z} = \vec{0}$

$f''(y) + \mu_0 \gamma i\omega f(y) = 0$

↳ Racines du polynôme caractéristique:

$x = \pm \exp(-i\pi/4) \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm \frac{1-i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \gamma \omega}$

Donc

$$f(y) = \underbrace{A\exp((1-i)y/\delta)}_{0} + B\exp(-(1-i)y/\delta)$$

soit par continuité de $\vec{E}$ tangentiel

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \exp(i\omega t)\exp((i-1)y/\delta)\vec{u_z} = E_0 \exp(i(\omega t + y/\delta))\exp(-1/\delta)\vec{u_z}}$$

2) $p = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2$ (puissance volumique absorbée par le milieu)

puisque $\operatorname{div}\vec{\Pi} + \partial u/\partial t = -\vec{j}\cdot\vec{E}$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2}\gamma \operatorname{Re}(\vec{E}\vec{E}^*)$$
$$= \frac{1}{2}\gamma \operatorname{Re}(E_0^2 \exp(-2y/\delta))$$
$$= \frac{1}{2}\gamma E_0^2 \exp(-2y/\delta)$$

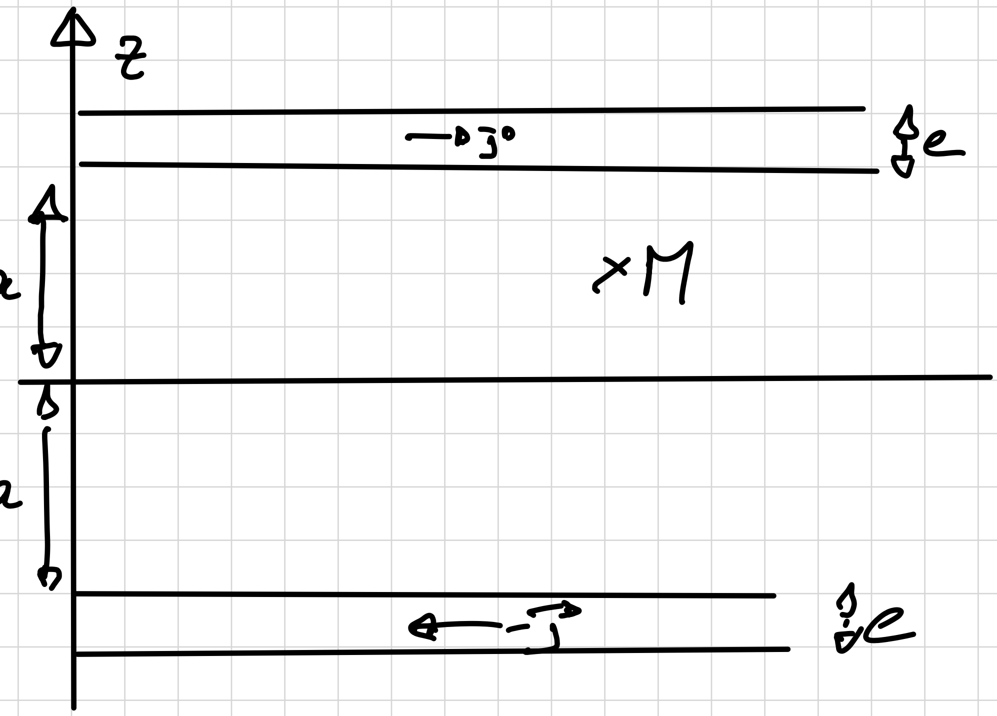
$$P = \iiint_{\mathcal{C}} \langle p \rangle d\tau$$
$$= -\frac{ab\delta}{4}\gamma \vec{E_0}^2 (\exp(-2L/\delta) - 1) \longrightarrow \boxed{\frac{ab\delta}{4}\gamma E_0^2}$$

$\operatorname{div} E = 0 = \rho_0$ car le conducteur est globalt neutre

et pour $j = \gamma \vec{E}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \operatorname{div}\vec{E} = 0$ soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0$. Donc pour $t \gg 0$, $\rho = 0$

MAGNÉTOSTATIQUE

Ex 3)



Invariances : translation + rotation selon $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$

Antisymétrie par (Oxy) : $\vec{B}$ est symétrique par rapport à (Oxy)
par (Myz) : $\vec{B} \in (Myz)$

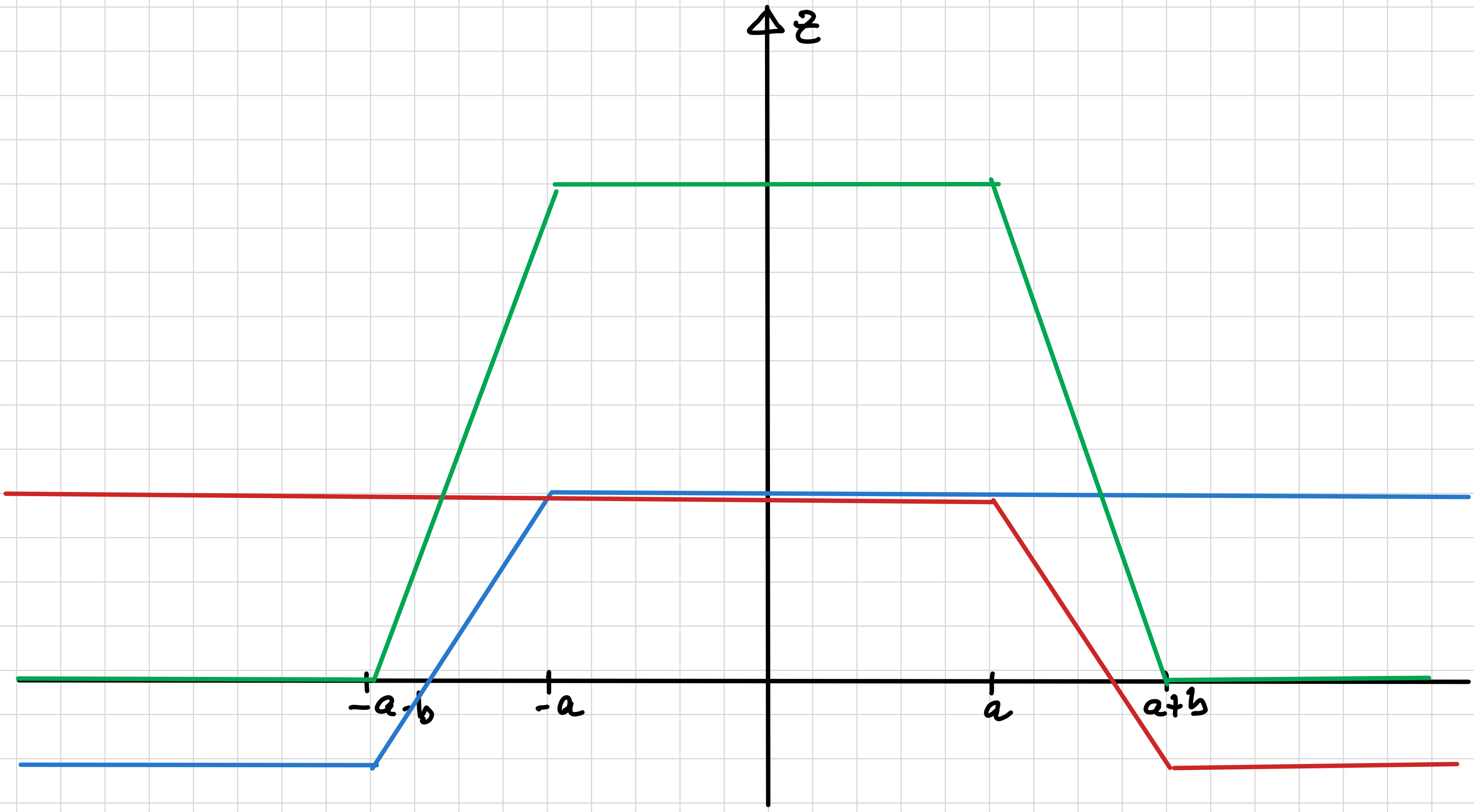
Symétrie par (Mxz) : $\vec{B} \perp (Mxz)$

Donc $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u_y}$

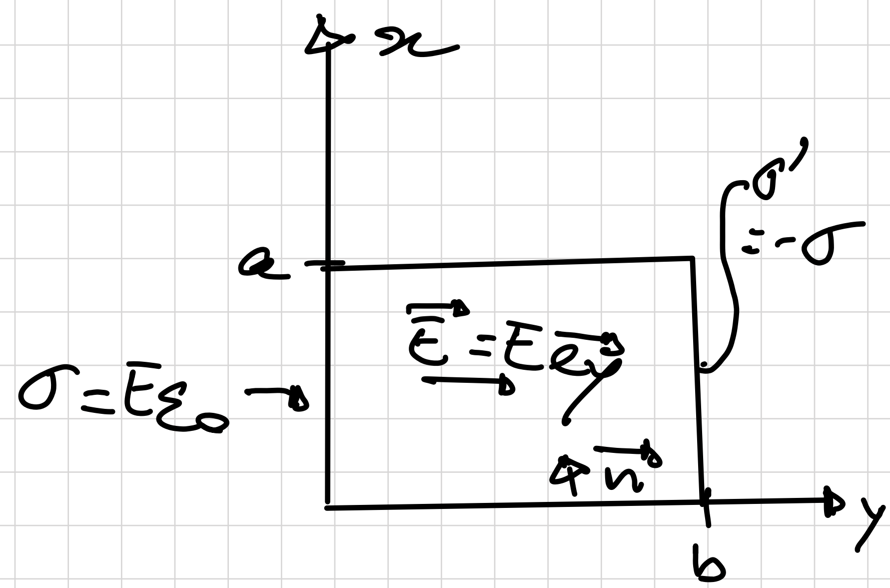
Par ailleurs, $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} = -\frac{\partial B}{\partial z}\vec{u_x}$ mais $-\frac{\partial B}{\partial z} = \mu_0 j$ donc

$B(z) = -\mu_0 j z + C$ $C = 0$ car $B(0) = 0$

Donc $\vec{B}(z) = -\mu_0 j z \vec{u_y}$



Exercice



En $x=0$ et $x=a$,

$$(\vec{E_2}-\vec{E_1})\cdot\vec{e_y} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n_{12}}\cdot\vec{e_y}$$

donc $E_{2y} = E_{1y}$

$\rightarrow E(0) = E(a) = 0$

Pour $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(j(\omega t - Kx))\,\vec{e_y}$, $\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$ et

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{E} \\ 0 \end{pmatrix} = jK E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(j(\omega t - Kx))\,\vec{e_x} + E_0\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(j(\omega t - Kx))\,\vec{e_z}$$

donc $\vec{B} = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp[j(\omega t - kz)] \vec{e_x}$

$$+ jE_0 \frac{\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(j(\omega t - kz)) \vec{e_z}$$

4) Relation de propagation : $\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi^2}{a^2} - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ donc

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$ (Relation de dispersion)

Et comme $k^2 > 0$, on a $\omega > \pi c/a$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0}\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2 k}{\omega} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{e_z}$$