Mécanique

Chapitre 2 - Changements de référentiels - Mécanique dans $\mathcal{R}$ non galiléen

On a vu qu'on pouvait associer un référentiel à un solide en donnant un repère lié au solide $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et une horloge. Dans le cadre de la mécanique classique, le temps est invariant par changement de référentiel, on omet en général de préciser l'horloge. En mécanique relativiste, deux évènements peuvent être simultanés dans un référentiel et ne pas l'être dans un autre.
On a défini le vecteur rotation d'un solide Σ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ en exprimant la vitesse de deux points liés au solide :

$$\vec{v}_B\Big|_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_A\Big|_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

- Σ est en translation dans $\mathcal{R}$ lorsque $\vec{\Omega} = \vec{0}$. Tous les points liés au solide Σ ont alors la même vitesse et la même accélération.
- Σ est en rotation autour d'un axe (Oz) à la vitesse angulaire ω lorsque :

$$\vec{v}_O = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_z$$

Dans ce qui suit :
- Le référentiel $\mathcal{R}_o$ est le référentiel **absolu**. On lui associe le repère $(O_o, \vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o)$. Le point M est repéré par la donnée du vecteur :

$$\overrightarrow{O_oM} = x_o(t)\vec{i}_o + y_o(t)\vec{j}_o + z_o(t)\vec{k}_o$$

- Le référentiel $\mathcal{R}$ est le référentiel **relatif**. On lui associe le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_o$. Le point M est repéré par la donnée du vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

I. Changement de référentiel

1. Lois de composition des vitesses

On va exprimer la vitesse de M dans le référentiel absolu $\mathcal{R}_o$ en faisant intervenir ses coordonnées dans le référentiel relatif. On écrit :

$$\overrightarrow{O_oM} = \overrightarrow{O_oO} + \overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O_oM} = \overrightarrow{O_oO} + \underbrace{x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}}_{\overrightarrow{OM}}$$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont liés au référentiel $\mathcal{R}$, ils ne sont pas constants dans $\mathcal{R}_o$:

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_o} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_o} \wedge \vec{i}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_oM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_o} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_oO}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_o} + \vec{\Omega} \wedge \underbrace{\left(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right)}_{\overrightarrow{OM}} + \underbrace{\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}}_{\vec{v}(M)\big|_{\mathcal{R}}}$$

La vitesse absolue (c'est-à-dire la vitesse dans le référentiel $\mathcal{R}_o$) s'écrit alors :

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$$

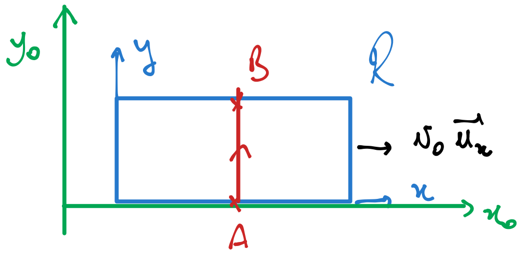
— $\vec{v}_r$ est la vitesse relative : c'est la vitesse de M par rapport au référentiel relatif $\mathcal{R}$.
— $\vec{v}_e$ est la vitesse d'entrainement : il s'agit de la vitesse d'un point P fixe dans $\mathcal{R}$ coïncidant avec le point M à l'instant t.

Cas de la translation : on a alors $\vec{\Omega} = \vec{0}$, tous les points liés au référentiel $\mathcal{R}$ ont la même vitesse $\vec{v}_o$ par rapport à $\mathcal{R}_o$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_o$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_o$$

Exemple : Un passager traverse le wagon d'une fenêtre à celle d'en face dans un train roulant à la vitesse $\vec{v}_o$ par rapport au sol. Quel est sa trajectoire vue du sol ?

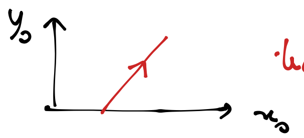


$$\vec{v}_e = v_0 \vec{u}_x \qquad \vec{v}_r = V \vec{u}_y$$

$$\left\{ \vec{v}_a = v_0 \vec{u}_x + V \vec{u}_y \right. \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 \\ \dot{y}_0 = V \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} x_0(t) = v_0 t \\ y_0(t) = V t \end{cases} \Rightarrow y_0 = \frac{V}{v_0} x_0$$

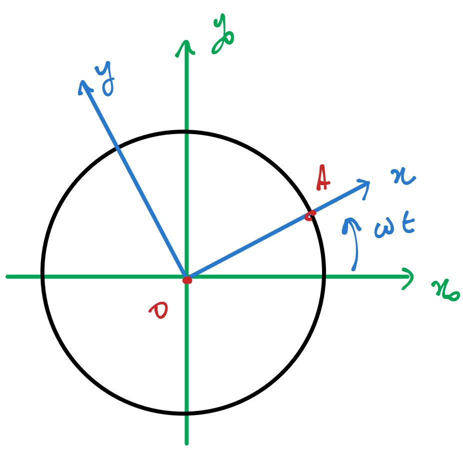


trajectoire dans $\mathcal{R}_o$

Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe : $\vec{v}(O) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_z$

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Exemple : un enfant part du centre d'un manège tournant à ω constante pour aller s'assoir sur un animal situé sur le bord (l'enfant suit un rayon). Quel est sa trajectoire vue du sol ?



$$\vec{v}_r = V \vec{u}_x \quad \text{avec } V \text{ uniforme}$$

$$\vec{v}_e = \omega x \vec{u}_y$$

avec $x = Vt$

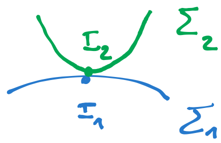
$$\rightarrow \vec{v}_a = V \vec{u}_x + V \omega t \, \vec{u}_y$$

Trajectoire $\theta(t) = \omega t$ $\quad r = Vt$ en polaire

$$\rightarrow r = \frac{V}{\omega} \theta$$

Applications

— Vitesse de glissement :

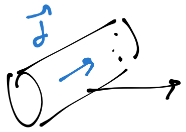


$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2}/_{R} - \vec{v}_{I_1}/_{R}$$

I_2 et I_1 coïncident à l'instant t, ils ont la même vitesse d'entrainement, **la vitesse de glissement en dépend donc pas du référentiel choisi**. On écrit souvent $\vec{v}_g$ dans le référentiel lié à Σ_1 :

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I_2}/_{\Sigma_1} \quad \text{car} \quad \vec{v}_{I_1}/_{\Sigma_1} = \vec{0}$$

— Induction : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ loi d'Ohm locale valable dans le réf. du conducteur R.



$\vec{v}_e$ = vitesse du conducteur par rapport à R_0

Dans R_0 : charges ⊕ : vitesse $\vec{v}_e$ charges ⊖ vitesse $\vec{v}_e + \vec{v}$

$$\vec{j}/_{R_0} = \rho_+ \vec{v}_e + \rho_-(\vec{v}_e + \vec{v}) = \underbrace{\rho_- \vec{v}}_{\vec{j}} \quad \text{car } \rho_+ + \rho_- = 0 \text{ (neutre)}$$

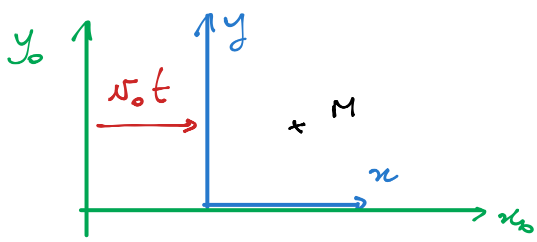
D'autre part : $\vec{F}/_R = \vec{F}/_{R_0}$: $q(\vec{E} + \vec{v}_r \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}_0 + (\vec{v}_r + \vec{v}_e) \wedge \vec{B}_0)$

Si $\vec{v}_r = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_0$ (puis $\vec{B} = \vec{B}_0$ en remplaçant)

Finalement dans R_0 : $\vec{j} = \gamma(\vec{E}_0 + \underbrace{\vec{v}_e \wedge \vec{B}_0}) \rightarrow$ il existe un courant même si $\vec{E}_0 = \vec{0}$ (pas de GBF)

— Transformation de Galilée :

Cas de R en TRU à $v_0 \vec{u}_x$ constante par rapport à R



$$\begin{cases} x_0 = x + v_0 t \\ y_0 = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{x} + v_0 \\ \dot{y}_0 = \dot{y} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_0 = \ddot{x} \\ \ddot{y}_0 = \ddot{y} \end{cases}$$

2. Composition des accélérations

On dérive à nouveau pour obtenir le lien entre l'accélération absolue :

$$\vec{a}_a(M) = \frac{d^2\overrightarrow{O_oM}}{dt^2}\Big|_{\mathcal{R}_o}$$

et l'accélération relative :

$$\vec{a}_r(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\Big|_{\mathcal{R}}$$

Cas de la translation : Dans le cas d'un solide en translation les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont constants et le vecteur $\vec{\Omega}$ est nul.

$$\frac{d^2\overrightarrow{O_oM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{O_oO}}{dt} + \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\overrightarrow{O_oM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{O_oO}}{dt^2} + \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$$

Dans le cas où le référentiel $\mathcal{R}$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}_o$:

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e$$

où l'accélération d'entrainement :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_oO}}{dt^2}$$

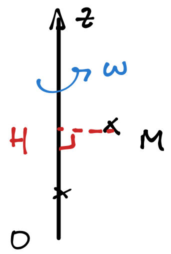
Tous les points de $\mathcal{R}$ ont la même accélération.

Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe : $\vec{v}(O) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$

$$\frac{d\overrightarrow{O_oM}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_o} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} + \vec{\Omega}\wedge\left(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\overrightarrow{O_oM}}{dt^2}\Big|_{\mathcal{R}_o} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\Big|_{\mathcal{R}_o} + \vec{\Omega}\wedge\underbrace{\left(\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}\right)}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)}_{-\omega^2 r\vec{u}_r \text{ en cylindriques}} + \vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$$

Dans le cas où le référentiel $\mathcal{R}$ est en rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_o$:



$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

— l'accélération d'entrainement :

$$\vec{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{HM}$$

— l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$$

Dans le cas général, on écrit :

$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

L'accélération de Coriolis a toujours la même expression (on peut vérifier qu'elle est nulle dans le cas d'un mouvement de translation), l'accélération d'entrainement est l'accélération du point P fixe dans $\mathcal{R}$ coïncidant avec le point M à l'instant t.

II. Dynamique dans un référentiel non galiléen

1. Référentiel galiléen

Il existe des référentiels dits **galiléens** dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme. On rappelle les lois de Newton : 1ère loi de Newton : Point matériel isolé ou pseudo isolé en TRU, 2ème loi de Newton : PFD, 3ème loi de Newton : principe de l'action et la réaction. Les référentiels usuels peuvent être considérés galiléens ou non suivant les mouvements étudiés.

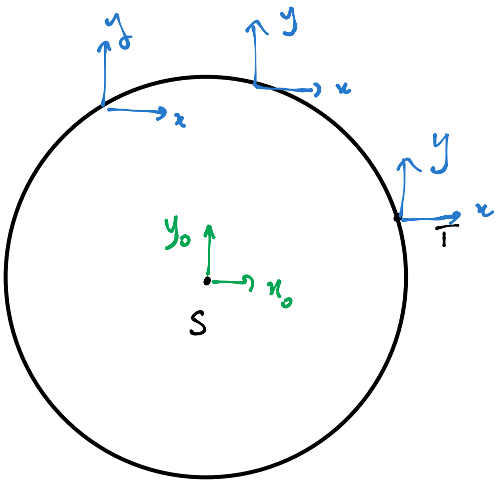
Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

— Le référentiel de **Copernic** a son origine au centre de masse du système solaire, ses axes pointent vers trois étoiles fixes. *Il est soumis à l'attraction gravitationnelle des autres étoiles de la voie lactée mais reste la meilleure approximation d'un référentiel galiléen pour un observateur lui-même dans le système solaire.* Il permet l'étude du mouvement de planètes autour du Soleil.

— Le référentiel **héliocentrique** (ou référentiel de Képler) est en translation par rapport au référentiel de Copernic. Son origine est le centre de masse du Soleil. *Dans le référentiel de Copernic, on doit tenir compte de l'action des différentes planètes, satellites ... du système solaire sur le mouvement du système étudié, dans le référentiel héliocentrique, on n'en tient pas compte : il faudrait sinon tenir compte de leurs actions sur le Soleil ce qui revient à passer dans le référentiel de Copernic.*

— Le référentiel **géocentrique** est en translation quasi-circulaire par rapport au référentiel de Copernic, son origine se trouve au centre de la Terre. Ce référentiel est adapté pour l'étude du mouvement des satellites autour de la Terre. Il peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durée petite par rapport à 1 année.

— Le référentiel **terrestre** est en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = 2\pi/T$ avec $T = 24\text{h}$ par rapport au référentiel géocentrique. Il peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durée petite par rapport à 1 jour.



translation circulaire

2. Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen

On considère dans ce qui suit que le référentiel absolu $\mathcal{R}_o$ est galiléen. On peut alors écrire le PFD dans $\mathcal{R}_o$:

$$m\vec{a}_a = \Sigma\vec{F}_{ext}$$

Le mouvement du point M est plus facile à décrire dans le référentiel $\mathcal{R}$ et on souhaiterait écrire le PFD dans $\mathcal{R}$ qui n'est a priori pas galiléen. On utilise la formule de composition des accélérations :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

On a alors :

$$m\vec{a}_r = \Sigma\vec{F}_{ext} \underbrace{- m\vec{a}_c}_{\vec{f}_{ic}} \underbrace{- m\vec{a}_e}_{\vec{f}_{ie}}$$

On peut écrire le PFD dans $\mathcal{R}$ non galiléen, à condition de tenir compte des forces d'inertie :
- $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ force d'inertie d'entrainement ;
- $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c$ force d'inertie de Coriolis (avec $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$).

Si $\mathcal{R}$ est en TRU par rapport à $\mathcal{R}_o$: les forces d'inertie sont nulles, $\mathcal{R}$ est également galiléen.

On peut également écrire la loi du moment cinétique en un point O fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \Sigma\mathcal{M}_O(\vec{F}) + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ie} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ic}$$

Ainsi que la loi de la puissance cinétique dans $\mathcal{R}$:

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \Sigma\mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{ie}$$

La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas :

$$\mathcal{P}\left(\vec{f}_{ic}\right) = -2m(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r).\vec{v}_r$$

Dans le cas où $\mathcal{R}$ est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω par rapport à $\mathcal{R}_o$, on peut écrire, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r\vec{u}_r$$

On parle de force axifuge ou centrifuge et on remarque :

$$\vec{f}_{ie} = -\frac{d}{dr}\left(-m\omega^2\frac{r^2}{2}\right)\vec{u}_r$$

On lui associe alors l'énergie potentielle :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2}$$

Exemples d'application (TD) : caisse à l'arrière d'un camion, pendule dans un train, équilibre d'une bille sur un cerceau tournant.

3. Caractère galiléen approché du référentiel terrestre

Rq : poids cf TD.

Ordre de grandeur de la force de Coriolis :

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 * 3600} = 7,3.10^{-5}\text{rad.s}^{-1}$$

— On peut par exemple comparer la force d'inertie d'entrainement à la force de gravitation pour un point à la surface de la terre :

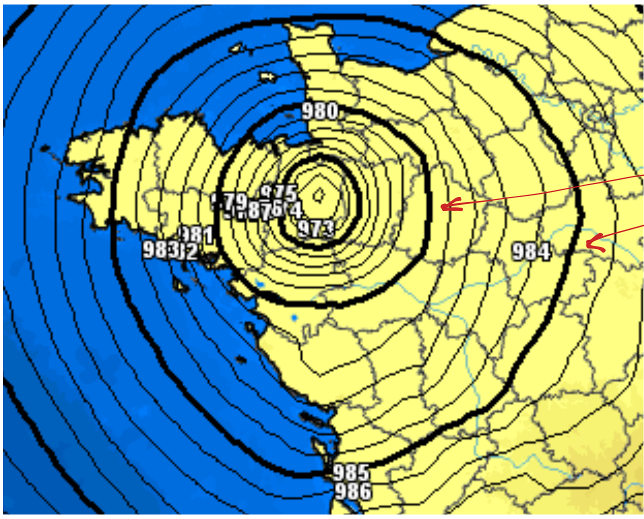
$$\frac{m\Omega^2 R_T}{mg} \simeq \frac{(7.10^{-5})^2.6,4.10^6}{10} = 3.10^{-3}$$

0,3 % d'écart au maximum.

— Pour un objet en mouvement, on peut comparer la force de Coriolis au . Par exemple, dans le cas d'une particule fluide de l'air ayant une vitesse de 100km/h soumise à un gradient de pression de 5hPa sur 100km (fort gradient voir carte météo) :

$$\frac{\|\rho 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r\|}{\|\overrightarrow{\text{grad}}P\|} \simeq \frac{1 * 2 * 7.10^{-5}.100/3,6}{5.10^2/10^5} = 0.8$$

La force de Coriolis n'est pas toujours négligeable dans le cas des flux atmosphériques : elle est à l'origine des cyclones dans lesquels les vents en altitude tournent autour de la zone à basse pression (sens de rotation dépendant de l'hémisphère).



5 hPa d'écart entre 2 isobares

Carte météociel

Manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre :

— Déviation vers l'est lors d'une chute verticale

— Pendule de Foucault : première démonstration publique en 1851, pendule de 67 m de long, masse de 47 kg, accroché à la voûte du Panthéon à Paris. Plan d'oscillation varie au cours du temps sous l'effet de la force de Coriolis (11° par heure).