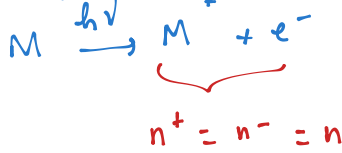


# Électromagnétisme

## Chapitre 8 - Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma dilué

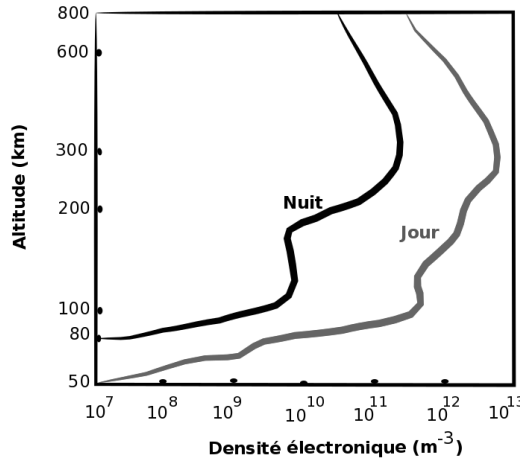
Sous l'effet des rayonnements

Cosmiques :



avec  $n \approx 10^{10} \text{ m}^{-3}$

dans la ionosphère



Couche de l'atmosphère entre 70 et 800 km = ionosphère

Figure 6 Évolution de la densité électronique dans l'ionosphère en fonction de l'altitude (d'après Culture Sciences - Physique, ENS Lyon)

### Notations :

— On note  $n$  le nombre d'électrons par unité de volume :

$$\rho_- = -ne$$

— En considérant qu'un atome donne un électron et un ion de charge  $+e$  :

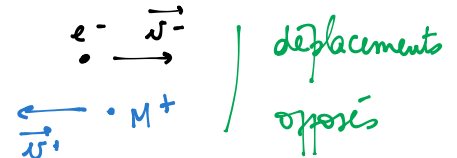
$$\rho_+ = +ne$$

Le milieu est donc globalement **neutre** :  $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$

— On note  $\vec{v}_-$  la vitesse de déplacement des électrons et  $\vec{v}_+$  celle des ions. Le vecteur densité volumique de courant :

$$\vec{j} = \rho_- \vec{v}_- + \rho_+ \vec{v}_+$$

$$\vec{j} \neq \vec{0}$$



## I. Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

### 1. Des équations de Maxwell aux équations de propagation

$$\rho = 0, \vec{j} \neq \vec{0}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \sum \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{rot} \left( \text{rot } \vec{E} \right) = \dots \rightarrow$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

L'équation de propagation fait intervenir  $\vec{j}$  qui provient de la mise en mouvement des porteurs de charges sous l'action de la force de Lorentz.

idée :  $\vec{j}$  lié à  $\vec{E}$  (pas  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  car pas conducteur ohmique)

## 2. Densité volumique de courant $\vec{j}$

On considère que le plasma est soumis à une OPPM :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} ; \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Équations de Maxwell (*Attention au choix de la convention choisie*) :

$$\begin{aligned} -i\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\ -i\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ transverses} \\ \end{array} \right.$$

$$-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \rightarrow B \sim \frac{k}{\omega} E$$

**Système :** électron de masse  $m$  de charge  $-e$

*comme dans le vide (relation de structure)*

**BAME :**

— Force de Lorentz :  $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v}_- \wedge \vec{B})$

— Dans le cas d'un plasma dilué (hautes couches de l'atmosphère) on néglige l'action des autres particules sur l'électron considéré (dans le cas d'un électron de conduction dans un métal on ajoutera une force de frottement fluide).

— On néglige l'effet de la pesanteur.

On compare les ordres de grandeur de la force magnétique et de la force électrique :

$$\frac{evB}{eE} = \frac{vB}{E}$$

On fait l'hypothèse (à vérifier) que la vitesse de phase dans le milieu  $\frac{\omega}{k}$  est proche de  $c$  :

$$\frac{B}{E} \simeq \frac{1}{c}$$

On a alors :

$$\frac{evB}{eE} \simeq \frac{v}{c} \ll 1 \quad (\text{mouvement non relativiste})$$

Le PFD appliqué à l'électron s'écrit alors :

$$m \frac{d\vec{v}_-}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{v}_- = \frac{-e}{i\omega m} \vec{E}$$

On montre de la même façon que la vitesse des ions de masse  $M$  dans le milieu :

$$\vec{v}_+ = \frac{e}{i\omega M} \vec{E}$$

On en déduit :

$$\vec{j} = \left( \frac{ne^2}{i\omega m} + \frac{ne^2}{i\omega M} \right) \vec{E}$$

La masse d'un proton est environ  $2.10^3$  fois plus grande que celle d'un électron : la masse  $M$  des ions est ainsi très supérieure à celle des électrons, et on peut faire l'approximation :

$$\vec{j} \simeq \frac{ne^2}{i\omega m} \vec{E}$$

De la même forme que la loi d'Ohm locale  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  : on introduit parfois une conductivité complexe

$$\gamma = \frac{ne^2}{i\omega m}$$

### 3. Relation de dispersion

On insère  $\vec{j}$  dans l'équation de propagation (ou dans les équations de Maxwell) :

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \mu_0 i \omega \frac{ne^2}{i\omega m} \vec{E}$$

On introduit la pulsation plasma  $\omega_p$  telle que :

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$$

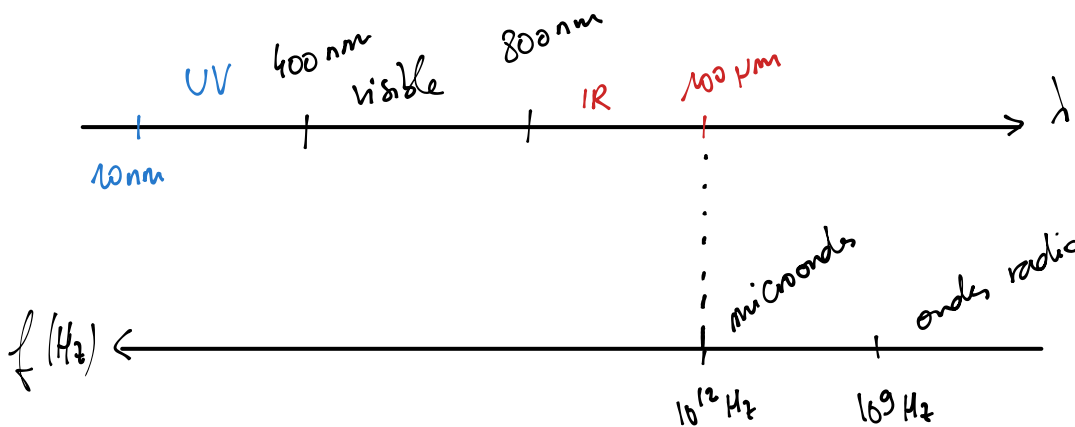
La relation de dispersion s'écrit alors :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

**Ordre de grandeur :** Estimer  $\omega_p$  pour la ionosphère. On donne :

$$n = 10^{10} \text{m}^{-3} ; m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg} ; \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$

On obtient :  $\omega_p = 5,6 \cdot 10^6 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  soit une fréquence plasma :  $f_p = 9 \cdot 10^2 \text{kHz}$ .



## II. Analyse des solutions

### 1. Puissance cédée à la matière $\vec{j} \cdot \vec{E}$

On commence par estimer la valeur moyenne de la puissance cédée à la matière :

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{j} \cdot \vec{E}^*)$$

$\vec{j} \cdot \vec{E}^* = \frac{n e^2 \|\vec{E}_0\|^2}{i \omega m}$   
imaginaire pur

$\vec{j} = \frac{ne^2}{i\omega m} \vec{E}$ , on a donc :

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$$

Lorsqu'une OPPM arrive sur le plasma, deux cas sont alors possibles : elle peut traverser le plasma sans être absorbées (exemple lumière visible provenant du Soleil), elle peut être totalement réfléchi. Il peut y avoir également interaction entre un photon et un atome pour conduire à l'ionisation de l'atome qui est à l'origine du plasma ...

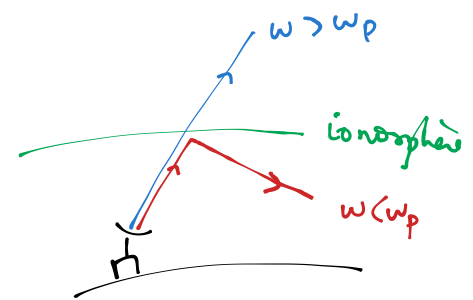
### 2. Premier cas : $\omega > \omega_p$ idée : lumière visible transmise

On peut alors exprimer :

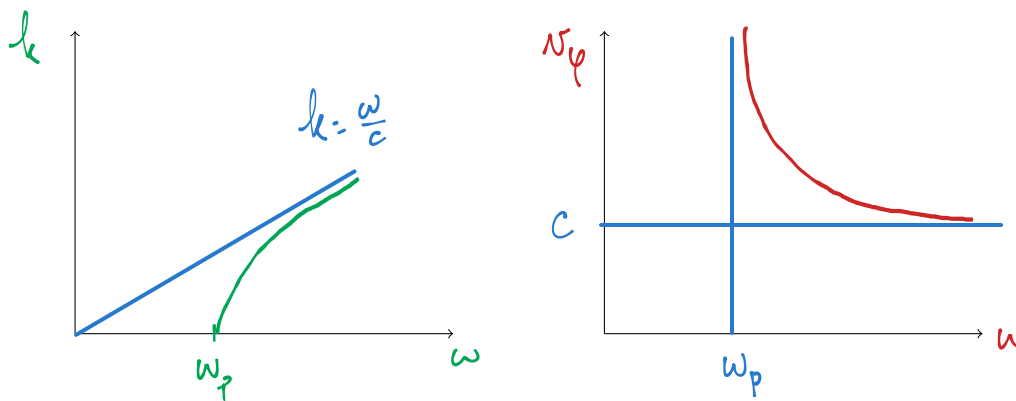
$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

La vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$



On peut tracer  $k$  et  $v_\varphi$  :



- $v_\varphi$  dépend de  $\omega$  : le milieu est dit **dispersif**
- $v_\varphi$  est supérieure à  $c$  mais OPPM=outil mathématique,  $v_\varphi$  ne correspond pas à la vitesse de propagation d'une information réelle.
- Pour  $\omega$  très grand :

$$k \simeq \frac{\omega}{c}$$

On retrouve le comportement du vide, la ionosphère est assimilable au vide dans le cas des ondes lumineuses.

- $\frac{E}{B} > c$  l'hypothèse de départ qui nous a permis de négliger la force magnétique est bien vérifiée. Attention, ce ne sera pas toujours le cas. On peut imaginer un dispositif dans lequel le plasma est en plus soumis à un champ magnétique intense.

**3. Deuxième cas :**  $\omega < \omega_p$

On a cette fois :

$$k = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm ik'$$

avec  $k' = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$

avec  $k'$  réel positif.

On considère par exemple l'arrivée d'une OPPM sur un plasma occupant le demi-espace  $z > 0$  :

Soit :

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\omega t + ik'z)} + \vec{E}'_o e^{i(\omega t - ik'z)}$$

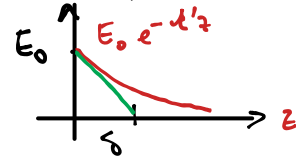
*Handwritten notes:  $k = -ik'$  (pointing to the first term),  $k = +ik'$  (pointing to the second term)*

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{-k'z} e^{i\omega t} + \vec{E}'_o e^{k'z} e^{i\omega t}$$

On ne garde que la composante ayant un sens physique (ne doit pas diverger) et on suppose le champ polarisé rectilignement suivant  $\vec{u}_x$  :

$$\vec{E} = E_o e^{-k'z} e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

$$\vec{k} = -ik' \vec{u}_z$$



- Pas de propagation mais une atténuation sur une longueur caractéristique  $\delta = 1/k'$ .
- On peut en déduire :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow \vec{B} = \frac{-ik'}{\omega} E_o e^{-k'z} e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

- Le vecteur de Poynting moyen :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_o} \right)$$

*Handwritten note: "imaginaire pur" (pointing to the denominator  $\mu_o$ )*

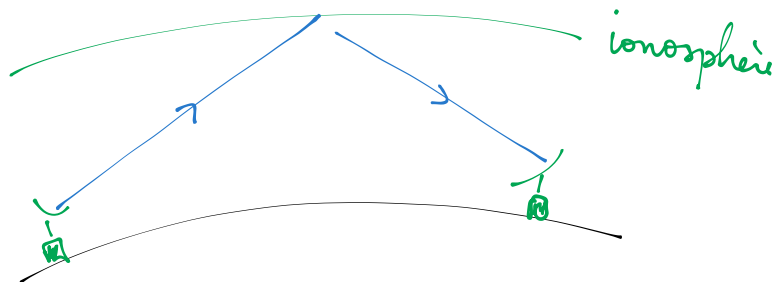
est donc nul. L'onde incidente est totalement réfléchi.

Les ondes du type :

$$\vec{E} = E_o e^{-k'z} e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

sont appelées **ondes évanescentes**. Elles ne transportent pas d'énergie et ne se propagent pas contrairement aux ondes progressives.

**Expérience de Marconi :** première liaison transatlantique en 1901 (fréquences de l'ordre de la centaine de kHz).

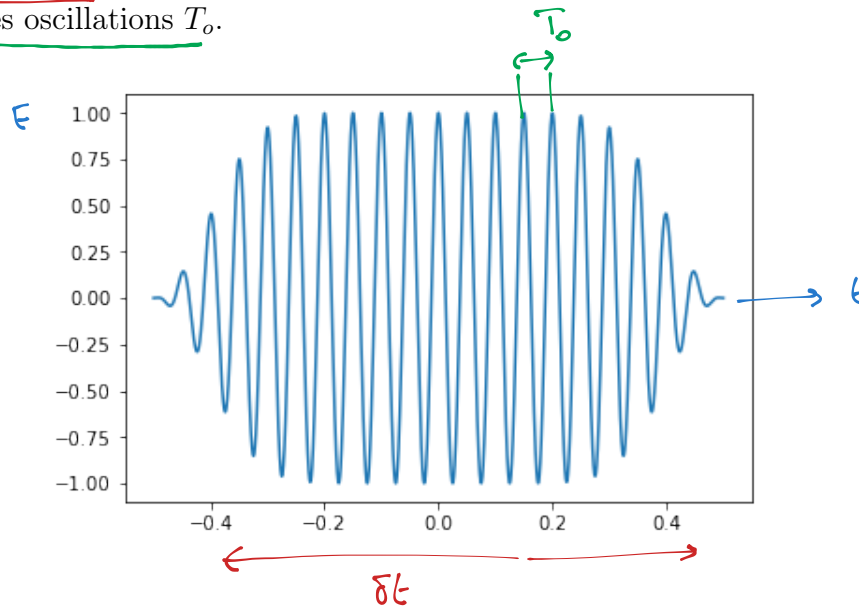


### III. Paquet d'ondes - Vitesse de groupe

#### 1. Notion de paquet d'onde

On représente un signal réel en un point de l'espace. On repère deux temps caractéristiques :

- La durée du signal  $\delta t$  ;
- La période des oscillations  $T_o$ .



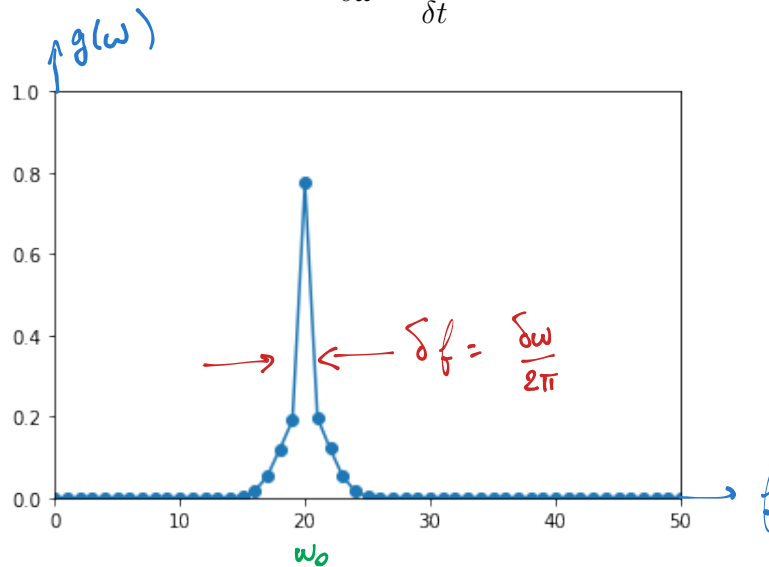
On peut relier ces caractéristiques temporelles aux caractéristiques spectrales (voir fichier Python) :

- Pulsation centrale :

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$$

- Largeur spectrale :

$$\delta\omega \simeq \frac{1}{\delta t}$$



Un paquet d'ondes de pulsation  $\omega_o$  se propageant suivant  $\vec{u}_z$  et polarisé suivant  $\vec{u}_x$  est une combinaison d'OPPH de pulsations proches de la pulsation  $\omega_o$  se propageant suivant  $\vec{u}_z$  et polarisées suivant  $\vec{u}_x$  d'amplitudes  $g(\omega)$  fixant la forme du paquet.

$$\vec{E}(z, t) = \int_0^\infty g(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega \vec{u}_x$$

$g(\omega)$  correspond par exemple au spectre d'une raie dans le cas d'un paquet d'onde émis par une lampe spectrale.  $k(\omega)$  est donné par la relation de dispersion.  $\rightarrow$  les  $\neq$  composantes du paquet d'onde ne se propagent pas à la même vitesse.

2. Vitesse de groupe

*on force la factorisation*

On souhaite exploiter le fait que  $g(\omega)$  prend des valeurs non nulles autour de  $\omega_0$ . On note  $k_0 = k(\omega_0)$ .

$$\vec{E}(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_0^\infty g(\omega) e^{i((\omega - \omega_0)t - (k - k_0)z)} d\omega \vec{u}_x$$

On fait un développement de Taylor à l'ordre 1 de  $k(\omega)$  autour de  $\omega_0$  :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}(\omega - \omega_0)$$

$$\begin{aligned} & (\omega - \omega_0) \left( t - \frac{dk}{d\omega} z \right) \\ & = (\omega - \omega_0) \left( t - \frac{z}{v_g} \right) \end{aligned}$$

On introduit la vitesse de groupe :

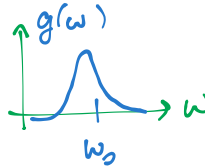
$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

On a alors :

$$\vec{E}(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_0^\infty g(\omega) e^{i((\omega - \omega_0)(t - z/v_g))} d\omega \vec{u}_x$$

Le signal est de la forme : OPPH à  $\omega_0$  \* enveloppe.

- Lorsque  $t - z/v_g$  est grand  $g(\omega)$  est multiplié par une sinusoïde oscillant rapidement : l'intégrale de  $g(\omega)$ \*sinusoïde est quasi-nulle.
- Lorsque  $t - z/v_g = 0$ , l'intégrale est maximale : on est au maximum de l'enveloppe. Celle-ci se propage donc à la vitesse  $v_g$ .



La **vitesse de groupe** :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

est la **vitesse de propagation** du paquet d'ondes.

Retour sur l'exemple du plasma :

Relation de dispersion :  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$

On différencie :  $2 k dk = 2 \frac{\omega}{c^2} d\omega \Rightarrow \frac{\omega}{k} \cdot \frac{d\omega}{dk} = c^2$

On a ainsi  $v_\phi \cdot v_g = c^2$

$\omega > \omega_p$  :

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \Rightarrow v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

